Övningsprov 1 – Ma5

1. Primtalfaktorisera följande tal

a) 224

b) 1500 (2/0/0)

2. Bestäm en explicit formel för följande talföljande

a) 2, 5, 8, 11, 14…

b) 3, 9, 27, 81…

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ (3/0/0)

3. Skriv följande tal i talbas 6

a) 43_{tio}

b) 100_{sju} (2/1/0)

4. Vilket är det minsta positiva heltalet a som har följande samband $45 \equiv a\ (mod 7)$

(2/0/0)

5. Sätt följande $<=, =>, <=>$ till följande påståenden

a) $3x + 4 = 25$ $\qquad$ $x = 7$

b) Joakim bor i Lund $\qquad$ Joakim bor i Skåne

(2/0/0)

6. Bestäm följande

a) $SGD(64, 24)$
b) $MGM(32, 72)$ (3/0/0)

7. Bestäm summan av de första 8 elementen av följande talföljder

a) $5, 7, 9, 11, 13, 15 \ldots$

b) $2, 6, 18, 54$ ...

8. Skriv följande tal i talbas 10 $11_{två}^{11}$

(0/3/0)

9. Visa följande

a) $a^2 + a + 1$ alltid är ett ojämnt tal

b) $7^{10} - 1$ är delbart med 6

c) Följande uttryck kommer alltid vara delbart med 2 då n är ett positivt heltal

$n^2 - n$ (0/5/0)

10. Undersök om uttrycket $n^2 + n + 4$ alltid är delbart med 4 om n är ett jämnt tal.

(0/2/0)

11. Joakim sätter in 3000 kr varje månad i en fond som har en månadsränta på 0,8%. Efter en tid har han sparat ihop 357 345 kr och tar då ut pengarna. Hur länge har Joakim sparat? Svara i år.

(0/2/0)

12. Bestäm ett uttryck för följande

a) $SGD(a^2b^2, ab^2)$

b) $MGM(2ab + 2,\ a^3b^2 - a)$ (0/2/1)

13. Visa att uttrycket $4^{2n} - 9$ aldrig kommer resultera i ett primtal om $n > 2$

(0/1/1)

14. Joakim har börjat ta en ny medicin Spyketrabon, mängden aktiv substans i en tablett är 300 mg. Enligt läkaren ska han ta en tablett var tolvte timme en på morgonen och en på kvällen. Efter 12 timmar har 60% av den aktiva substansen från en tablett försvunnit ur blodet. Joakim googlar och ser att han inte får ha mer än 600 mg aktiv substans i blodet eftersom det kan vara livshotande. Han ringer tillbaka till läkaren som säger att han inte behöver vara orolig och kan ta tabletterna som vanligt. Visa matematiskt varför Joakim inte behöver vara orolig.

(0/1/2)

15. Undersök om följande likhet kan uppstå

$$100_x = 117_{x-2}$$

(0/1/2)

16. Visa att $n^3 - n$ alltid är delbart med 6 för alla heltal då $n > 0$

(0/1/2)

17. Bestäm det minsta möjliga positiva heltalet x i vilket

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \cdots \leq \frac{3}{8}$$

Anta att summan går mot oändligheten

(0/0/3)

Övningsprov 1 - Ma5

1. a) $224 = 2 \cdot 112 = 2 \cdot 2 \cdot 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

b) $1500 = 15 \cdot 100 = 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

2. a) $a_n = 3n - 1$ b) $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$ c) $1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. a) $1 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6^0 = 111_{sex}$ b) Skriv först i talbas 10

$1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 = 49_{tio}$

$1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = 121_{sex}$

4. $45 \equiv a \pmod 7$

$a = 3$

5. a) $3x + 4 = 27 \iff x = 7$

b) Joakim bor i Lund $\Rightarrow$ Joakim bor i Skåne

6. a) $SGD(64, 24)$ $64 = 8 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$24 = 12 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$SGD(64, 24) = 8$

b) $MGM(32, 72)$ $32 = 8 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$72 = 9 \cdot 8 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$MGM = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 288$

7. a) $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(5 + 19)}{2} = 96$

b) $S_8 = 2 \cdot \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3^8 - 1 = 6560$

8. $11^{11}_{två} = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0)^{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0} = 3^3 = 27$

9. a) Undersök för jämna och ojämna tal

$a=2n \quad a^2+a+1=4n^2+2n+1=2(2n^2+n)+1$ Alltid ojämnt!

$a=2n+1 \quad (2n+1)^2+2n+1+1=4n^2+4n+1+2n+1+1=4n^2+6n+3=$

$=2(2n^2+3n)+3$ alltid ojämnt!

b) $7^{10}-1 \equiv 1^{10}-1=0 \pmod 7$

c) $n^2-n=n(n-1)$ $\quad \underbrace{n(n-1)}$ faktorerna är två på varandra följande heltal minst 1 måste vara jämn vilket gör att produkten blir jämn.

10 n^2+n+4

$n=2k \quad n^2+n+4=(2k)^2+2k+4$

$=4k^2+2k+4=2\underbrace{(2k^2+k+2)}_{\text{är inte alltid jämnt}}$

därav

$4 \nmid n^2+n+4$

11. Vi får summan $3000+3000\cdot 1{,}008+3000\cdot 1{,}08^2\ldots$

$S_n=3000\dfrac{(1{,}008)^n-1}{1{,}008-1}$ $\quad S_n=357345$

n = antal månader

$357345=\dfrac{3000\cdot(1{,}008^n-1)}{0{,}008}$

$\dfrac{357345\cdot 0{,}008}{3000}+1=1{,}008^n$

$\lg\left(\dfrac{357345\cdot 0{,}008}{3000}+1\right)=n\cdot\lg(1{,}008)$

$n=\dfrac{\lg\left(\frac{357345}{3000}+1\right)}{\lg(1{,}008)}\approx 84 \qquad \dfrac{84}{12}=7$ Svar: 7 år!

12. a) $SGD(a^2b^2, ab^2) = ab^2$

b) $mgm(2ab+2, a^3b^3-a)$ $\quad 2ab+2 = 2(ab+1)$

$a^3b^2 - a = a(a^2b^2-1) = a(ab+1)(ab-1)$

$mgm = 2a(ab+1)(ab-1)$

13. $4^{2n} - 9 = (4^n-9)(4^n+9)$ sammansatt tal! Aldrig ett primtal!

14. Vi får summan $300 + 300 \cdot 0{,}4 + 300 \cdot 0{,}4^2 \ldots$ vi vill dra summans termer mot oändligheten! försummas!

$$S_n = \frac{300 \cdot (0{,}4^n - 1)}{0{,}4 - 1} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{300(0{,}4^n-1)}{0{,}4-1} = \frac{-300}{-0{,}6} = 500$$

Svar: mängden aktivt läkemedel kommer aldrig överstiga 500 mg

15. $100_x = 117_{x-2}$

$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^0 = 1 \cdot (x-2)^2 + 1 \cdot (x-2) + 7 \cdot (x-2)^0$

$x^2 = x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 7$

$3x = 9$

$x = 3$ Funkar inte! om $x=3$ kan vi inte använda de siffror vi använt, dessutom kan vi inte bygga upp tal i talbas 1.

16. $n^3 - n$ faktorisera! $n(n^2-1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)n(n+1)$

Tre på varandra följande heltal minst ett tal är jämnt och en är delbar med 3. Det visar att uttrycket alltid är delbart med 6.

17. Vi kan se detta som en geometrisk talföljd $a_1 = \frac{1}{x}$ och $k = \frac{1}{x^2}$ Vi vill undersöka summan

$S_n = \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n - 1}{\frac{1}{x^2} - 1}$ Vi kan sedan sätta $S_n = \frac{3}{8}$

n går mot $\underbrace{\text{oändligheten}}$ försummas

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^n - 1}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1 - x^2}{x^2}} = \frac{-1}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{-x}{1 - x^2} = \frac{3}{8}$$ korsmulti

$-8x = 3 - 3x^2$

$3x^2 - 8x - 3 = 0$

$x^2 - \frac{8x}{3} - 1 = 0$

$$x = \frac{8}{6} \pm \sqrt{\frac{64}{36} + 1}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} \qquad x_1 = \frac{9}{3} = 3 \quad \left(x_2 = \frac{-1}{3}\right)$$

Svar: Minsta heltalet är 3