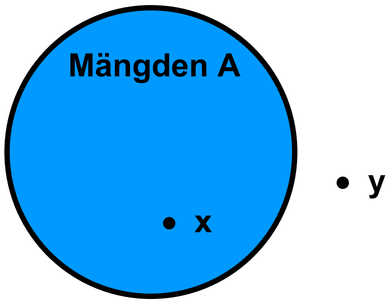
Mängder och mängdoperationer

<u>Def.:</u> **En väldefinierad samling av saker och ting (föremål, objekt) kallas mängd.**

Väldefinierad kallas en mängd, om man alltid kan avgöra om ett element tillhör mängden eller ej.



Låt mängden A bestå av ett antal element.

Att elementet x tillhör mängden A

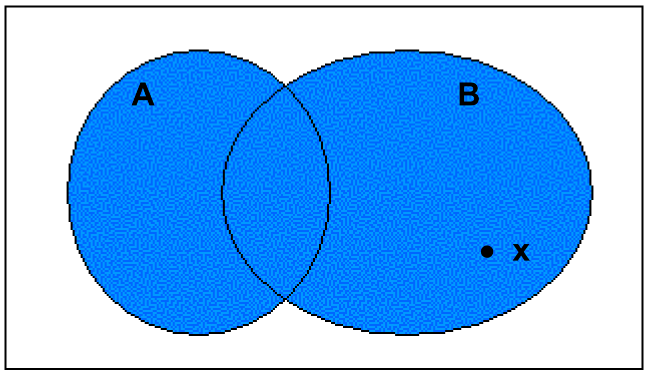
uttrycks med: $x \in A$

y tillhör inte A: $y \notin A$

Vi sysslar endast med väldefinierade mängder.

1) Man kan bilda unionen av två mängder:

Man slår ihop (förenar, sammanfogar) två mängder.



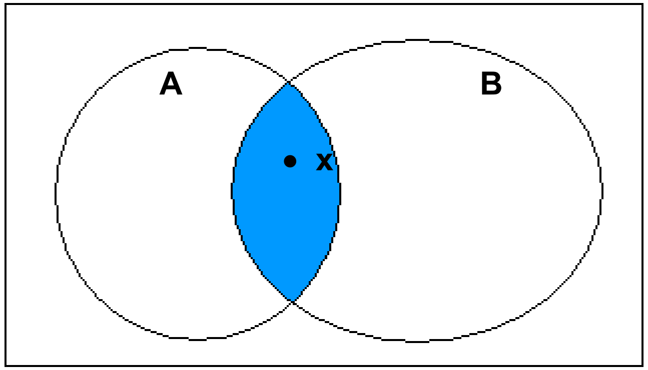
Resultatet är unionen (föreningsmängden) av mängderna A och B och betecknas med:

$$A \cup B$$

$$x \in A \cup B \quad \text{om} \quad x \in A \text{ ELLER } x \in B$$

Motsvarar den logiska operatorn ELLER

2) Man kan bilda **snittet** av två mängder:



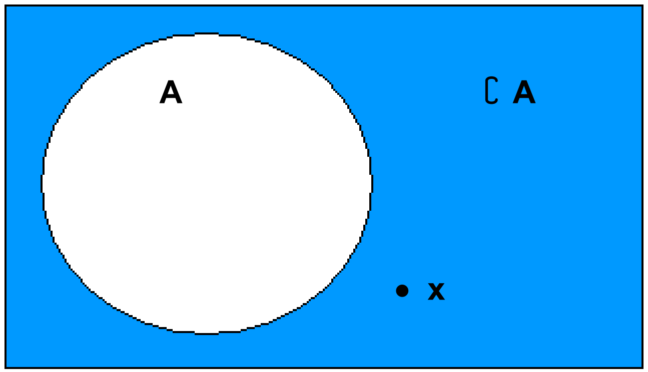
Resultatet är snittet (skärningsmängden, det gemensamma) av mängderna A och B och betecknas med:

$$A \cap B$$

$$x \in A \cap B \quad \text{om} \quad x \in A \ \text{OCH} \ x \in B$$

Motsvarar den logiska operatorn OCH

3) Man kan bilda **komplementet** av en mängd:



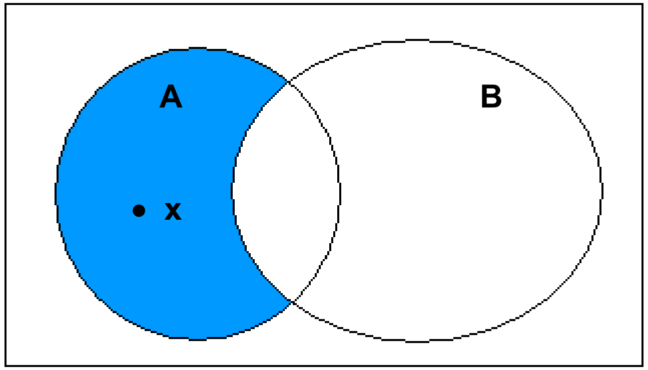
Resultatet är komplementmängden av mängden A och betecknas med:

$$\complement A$$

$$x \in \complement A \quad \text{om} \quad x \notin A$$

Motsvarar den logiska operatorn NEGATION

4) Man kan bilda **differensen** av två mängder:

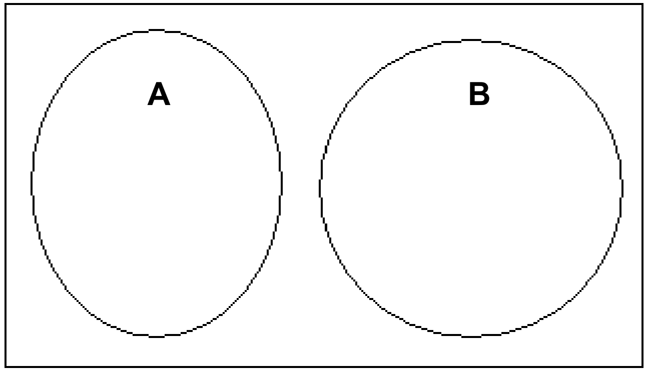


Resultatet är mängddifferensen av mängderna A och B och betecknas med:

$$A \setminus B$$

$$x \in A \setminus B \quad \text{om} \quad x \in A \ \text{OCH} \ x \notin B$$

5) Man kan bilda den s.k. **tomma mängden:**



Två mängder utan något gemensamt element kallas disjunkta.

Snittet av disjunkta mängder är den tomma mängden och betecknas med Ø :

$$A \cap B = \emptyset$$

6) **Man kan bilda den s. k. cartesiska produkten av två mängder.**

Resultatet är mängden

A X B (A "kryss" B)

**av samtliga ordnade par (x, y) där x tillhör mäng-
den A och y tillhör mängden B:**

(x, y) ∈ A x B om x ∈ A OCH y ∈ B

<u>Exempel:</u>

Låt *Person* vara följande mängd:

***Person* = {** Ola, Eva, Jimmy, Alexander, Helen, David, Diana **}**

Låt *Lägenhet* vara mängden av följande lägenheter:

***Lägenhet* = {** 1, 2, 3 **}**

Den cartesiska produkten av dessa två mängder består av mängden:

***Person* X *Lägenhet* = {** (Ola, 1), (Ola, 2), (Ola, 3),
(Eva, 1), (Eva, 2), Eva, 3),
(Jimmy, 1), (Jimmy, 2), Jimmy, 3),
(Alexander, 1), (Alexander, 2), (Alexander, 3),
(Helen, 1), (Helen, 2), (Helen, 3),
(David, 1), (David, 2), (David, 3),
(Diana, 1), (Diana, 2), (Diana, 3) **}**

Vad är en relation?

En delmängd av den cartesiska produkten av två mängder kallas för relation mellan dessa två mängder.

Ex.: **Relationen ”en person tilldelas sin lägenhet” – låt oss kalla den för R – är definierad så här:**

” I ett hyreshus bor Ola, Eva och Jimmy i lägenhet 1,
Alexander och Helen i lägenhet 2,
David och Diana i lägenhet 3 ”

Denna relation kan beskrivas i en tabell →

Tabell
”en person tilldelas sin lägenhet”

Person	Lägenhet
Ola	1
Eva	1
Jimmy	1
Alexander	2
Helen	2
David	3
Diana	3

Samtidigt är relationen R en delmängd av den cartesiska produkten *Person* x *Lägenhet* :

R = { (Ola, 1), (Eva, 1), (Jimmy, 1),
(Alexander, 2), (Helen, 2), (David, 3),
(Diana, 3) **}**

Slutsats:

Tabell = relation mellan dess kolumner (mängder av data).
Tabellens rader beskriver (definierar) relationen.

Bilder som visades med mängdoperationerna 1) - 5) ovan kallas för Venndiagram efter den brittiske logikern John Venn (1834-1923).

Med Venndiagram kan man illustrera även logiska lagar när de är skrivna med mängdnotation:

Mängd motsvarar utsaga.

T.ex.: *De Morgans lagar*, där p och q är utsagor och $\neg$ är symbolen för logisk negation:

$$\neg\ (p \ \text{OCH}\ q) \ \Leftrightarrow\ \neg\ p \ \text{ELLER}\ \neg\ q$$

$$\neg\ (p \ \text{ELLER}\ q) \ \Leftrightarrow\ \neg\ p \ \text{OCH}\ \neg\ q$$

kan med mängdnotation skrivas så här, där A och B är mängder och $\complement$ är symbolen för komplementmängden, $\cap$ för snittet och $\cup$ för unionen av två mängder (se definitionerna i början):

$$\complement\,(A \cap B) = (\complement\,A) \cup (\complement\,B)$$

$$\complement\,(A \cup B) = (\complement\,A) \cap (\complement\,B)$$

<u>Övning:</u> Illustrera De Morgans lagar i mängdnotation med Venndiagram.

<u>Lösningen</u> följer med hjälp av venndiagram på de två följande sidorna.