

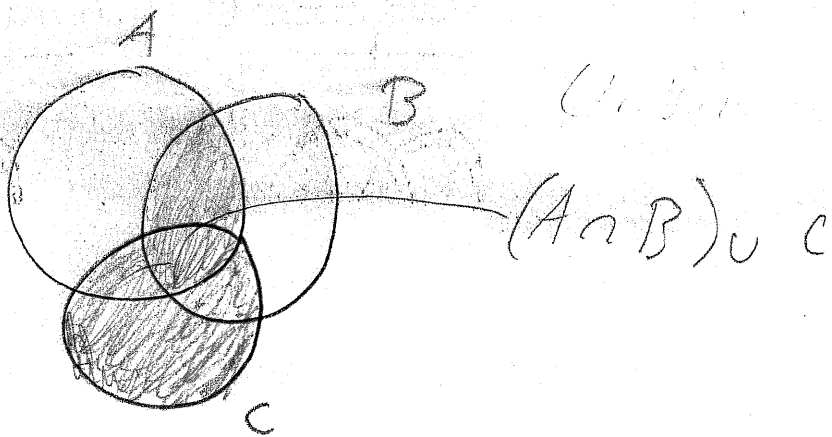
$$1. \sum_{k=1}^4 (k^2 - 1) = (1^2 - 1) + (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + (4^2 - 1) = \\ = 0 + 3 + 8 + 15 = \underline{26}$$

$$2. A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{8, 9\}$$

$$a) (A \cup B) \cap C = \underline{\{8\}} \quad b) A \setminus B = \underline{\{1, 3\}}$$

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$3. \frac{12!}{10! \cdot 22} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \dots \cdot 1}{\cancel{10} \cdot \cancel{9} \dots \cdot 1 \cdot 22} = \frac{12 \cdot 11}{22} = \frac{12 \cdot \cancel{11}}{\cancel{11} \cdot 2} = \frac{12}{2} = \underline{6}$$



$$5. x \equiv 35 \pmod{11} \quad \text{Formel: } a \equiv b \pmod{c}$$

$$a - b \mid c$$

$$\frac{x - 35}{11} = \text{heltal}$$

$$\frac{2 - 35}{11} = -3$$

$$\underline{x_1 = 2} \quad \underline{x_2 = 13}$$

$$\frac{13 - 35}{11} = -2$$

6. A, B, C, D, E, F

a) Permutation utan upprepning.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{6} & \boxed{5} & \boxed{4} & \boxed{3} \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array}$$

$$B_1 = 6$$

$$B_2 = 5$$

$$B_3 = 4$$

$$B_4 = 3$$

$$\text{Svar: } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 30 \cdot 12 =$$

$$= \begin{array}{r} 30 \\ \times 12 \\ \hline 60 \\ 00 \\ + 300 \\ \hline 360 \end{array}$$

b) Permutation utan upprepning där B_1 och B_2 är 1.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{3} \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array}$$

$$\text{Svar: } 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$$

$$7. A = \{n \mid n \equiv 1 \pmod{6}\}, B = \{n \mid n \in \text{Primtal}, 10 \leq n \leq 50\}$$

a) Det minsta primtalet mellan 10 och 50 är 11. Men det är inte kongruent med 1 (mod 6). Primtalet efter 11 är 13.

13 är kongruent med 1 (mod 6).

i 13 två gånger med 1 i rest. $\frac{13-1}{6} = 2$, eller 6 går jämnt

$$\text{Svar: } A \cap B = \underline{13}$$

m/n

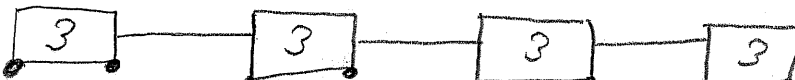
7. $A = \{n | n \equiv 1 \pmod{6}\}$, $B = \{n | n \in \text{Primal}, 10 < n < 50\}$

b) Det största primtalet mellan 10 och 50 är 47, men 47 är inte kongruent med $-1 \pmod{6}$. Primtalet innan är 43, 43 är kongruent med $-1 \pmod{6}$. $\frac{43-1}{6} = 7$, eller 6 går jämnt i

43 sju gånger med resten 1.

Svar: $A \cap B = \underline{43}$

8.

S_1 :  $= 3^4 = 81$

S_2 :  $= 2^4 = 16$

Svar: $S_1 - S_2 = 81 - 16 = \underline{65}$

S_1 : Vagnarna kan ha tre olika färger röd, blå eller grön.

S_2 : Vagnarna kan ha två olika färger blå eller grön.

$S_1 - S_2$: innebär att man tar alla kombinationer där alla vagnar kan bli röda ... subtraherat med alla kombinationer där inte en enda röd vagn förekommer.

9. $\binom{25}{15} + \binom{25}{16} = \binom{n}{k}$ Pascals formel: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

$n = 25 + 1 = 26$

$k = 16$

Svar: $n = 26$, $k = 16$

10. $n! \mid 3^8$

$\textcircled{1}$ $2 \cdot 3^{\textcircled{2}}$ $3 \cdot 3^{\textcircled{4}}$ $4 \cdot 3^{\textcircled{5}}$ $5 \cdot 3^{\textcircled{6}}$ $7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^{\textcircled{8}}$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
 $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6} \textcircled{7} \textcircled{8}$

Svar: $n = 18$

11.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot n + n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$a_1 = a_0 \cdot 1 + 1^2 = 1 \cdot 1 + 1^2 = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot 2 + 2^2 = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$$

$$a_3 = a_2 \cdot 3 + 3^2 = 8 \cdot 3 + 3^2 = \underline{\underline{33}}$$

12.

$$\frac{dy}{dt} = -0,023y, \quad y(0) = 5 \cdot 10^6$$

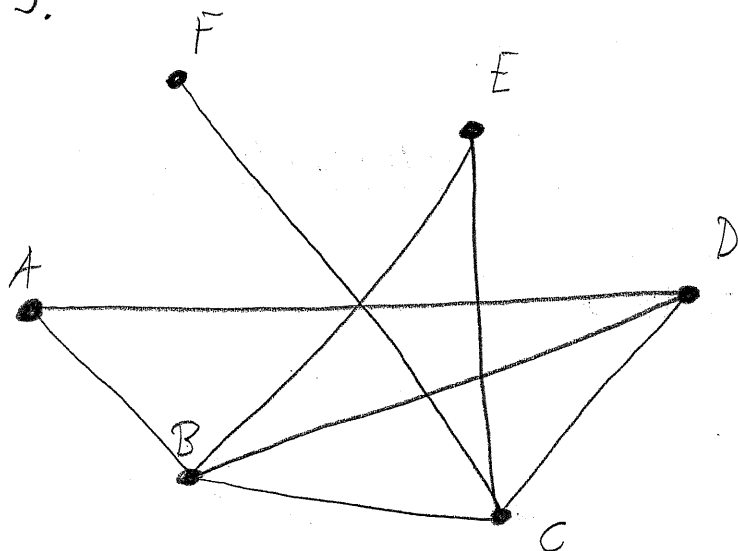
Johannas påståande: $y = 5 \cdot 10^6 \cdot e^{0,023t}$

Derivering av Johannas funktion: $\frac{dy}{dt} = 0,023 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot e^{0,023t}$

Johanna har fel, deriverar man hennes funktion så blir den positiv. Derivatorna skall bli negativ.

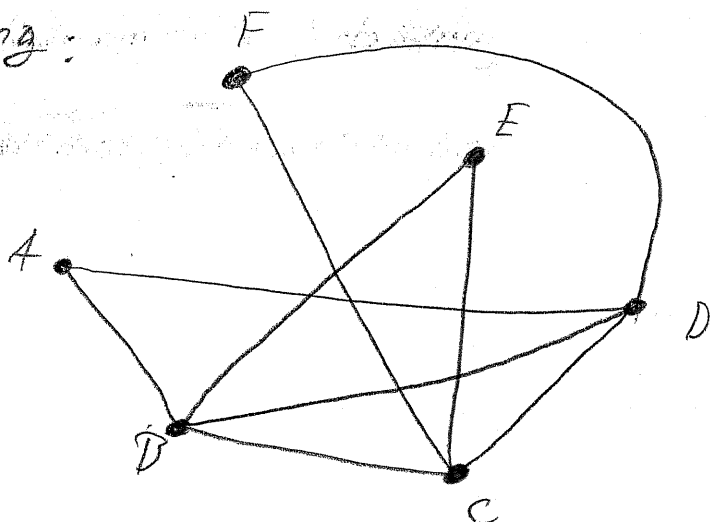
13.

Grafen skall innehålla
en Eulercykel/Eulerkrets.



För att en graf ska vara en Eulercykel/Eulerkrets så
måste varje nod/hörn ha ett jämnt antal kanter. I fallet
ovan så har F och D ett ojämnt antal kanter. Drar man
en kant mellan F och D bildas en Eulercykel samt Eulerkrets

Lösning:



$$14. S_n = (5n-3) \cdot n, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a) a_1 = S_1 = (5 \cdot 1 - 3) \cdot 1 = \underline{2}$$

$$b) S_2 = a_1 + a_2 = (5 \cdot 2 - 3) \cdot 2 = 14$$

$$a_1 + a_2 = 14$$

$$a_2 = 14 - a_1 = 14 - 2 = 12$$

$$d = a_2 - a_1 = 12 - 2 = \underline{10}$$

$$15. (-x^2y)^3, (3x-y)^5 \quad C = ?$$

Pascal's triangle:

1	-	①					
1	2	1	-	②			
1	3	3	1	-	③		
1	4	6	4	1	-	④	
1	5	10	10	5	1	-	⑤

$$(-x^2y)^3 \cdot 10 = 10 \cdot (-9)x^2y^3 = \underline{\underline{-90x^2y^3}}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=C}$

$$C = \underline{\underline{-90}}$$

16.

$$\begin{aligned}
C\binom{n+1}{2} \cdot \frac{(n-1)!}{n!(n+1)} &= \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!(n+1)} = \\
&= \frac{(n+1)!}{2!(n+1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!(n+1)} = \frac{(n+1)!}{2! \cdot n!(n+1)} = \frac{n!(n+1)}{2! \cdot n!(n+1)} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$17. \quad \frac{dy}{dt} = -\left(1 - \frac{y}{5}\right)\left(1 - \frac{y}{20}\right)$$

$$b) \quad y(0) = 5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\underbrace{\left(1 - \frac{5}{5}\right)}_0 \left(1 - \frac{5}{20}\right) = 0$$

Då $y = 5$ så kommer tillväxthastigheten att vara noll.

$$y(0) = 5,01 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\left(1 - \frac{5,01}{5}\right)\left(1 - \frac{5,01}{20}\right) > 0$$

Då $y = 5,01$ så kommer tillväxthastigheten att vara positiv, alltså växande.

Differentialequationen är växande då $5 < y < 20$.

När $y \rightarrow 20$ så blir tillväxten mindre och tillslut noll. Härnäst så blir derivatan avtagande.

$$18. \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad n \geq 1$$

$$V.L_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$$

$$H.L_n = (n+1)! - 1$$

$$n=1 \quad V.L_1 = \sum_{k=1}^1 k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 \quad H.L_1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$$

$$V.L_1 = H.L_1$$

Antag: om man har talet n i $V.L_n$ och $H.L_n$ så är

$V.L_n = H.L_n$. Då skall även $V.L_{n+1} = H.L_{n+1}$ då man har talet $(n+1)$.

$$V.L_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}_{= H.L_n} + (n+1) \cdot (n+1)! = H.L_{n+1} = (n+1+1)! - 1 = (n+2)! - 1$$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$$

$$H.L_n = (n+1)! - 1 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$$

$$(n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1 \quad | +1$$

$$(n+1)! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! \quad | / (n+1)!$$

$$1 + (n+1) = \frac{(n+2)!}{(n+1)!}$$

$$1 + (n+1) = \frac{(n+1)! (n+2)}{(n+1)!}$$

$$1 + n + 1 = n + 2$$

$$n + 2 = n + 2 \quad V.S.V$$

$$19. \quad C\binom{36}{14} = \frac{36!}{14!(36-14)!} = \frac{36!}{14! \cdot 22!} = \underline{\underline{3\,796\,297\,200}}$$

20. 12 olika äppelrorter, man skall välja 3 olika äppelrorter av dessa 12 utan hänsyn till ordningen. Detta blir en kombination som ser ut på följande sätt:

$$C\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \underline{\underline{220}}$$

21.

a) Explicit Formel: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$a_1 = 8 \quad d = a_2 - a_1 = 16 - 8 = 8$$

svar: $a_n = 8 + (n-1) \cdot 8 = 8n$

b) Rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + d$

$$a_1 = 8 \quad d = 8$$

svar: $a_{n+1} = a_n + 8$

22. Poikar: 6 st Flickor: 4 st Platser: 10 st

a) Permutation utan approximation.

$\boxed{10} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{7} \boxed{6} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1}$

Svar: $10! = \underline{\underline{3\,628\,800}}$

b) Flickorna ska sitta bredvid varandra.

$\boxed{F} \boxed{F} \boxed{F} \boxed{F} \quad \boxed{P} \boxed{P} \boxed{P} \boxed{P} \boxed{P} \boxed{P}$
4 3 2 1 6 5 4 3 2 1

F: $4! = 24$

P: $6! = 720$

Permutation: F · P = $4! \cdot 6!$

Sedan så kan flickorna placeras bland pojkarna på 7 olika sätt.

Svar: $7 \cdot 4! \cdot 6! = \underline{\underline{120\,960}}$

$$23. \quad \frac{dN}{dt} = 9,0 \cdot 10^{-6} \cdot N(7000 - N), \quad N(0) = 600$$

a) Löses numeriskt (ex. Eulers metod).

$$\text{ex: } N(t) \approx \frac{7000 \cdot 1,065^t}{1,065^t + 10,667}$$

$$b) \quad \frac{dN}{dt} = 9,0 \cdot 10^{-6} \cdot 7000N - 9,0 \cdot 10^{-6} N^2$$

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = N''(t) = 9,0 \cdot 10^{-6} \cdot 7000 - 18 \cdot 10^{-6} N$$

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = 0 \Rightarrow 9,0 \cdot 10^{-6} \cdot 7000 - 18 \cdot 10^{-6} N = 0 \quad | \cdot 10^{-6}$$

$$9,0 \cdot 7000 - 18N = 0 \quad | : 9,0$$

$$7000 - 2N = 0 \quad | + 2N$$

$$2N = 7000 \quad | : 2$$

$$N = 3500$$

Vid den tidpunkt då $N = 3500$ så får man den största tillväxthastigheten.

$$\frac{7000 \cdot 1,065^t}{1,065^t + 10,667} = 3500$$

$$7000 \cdot 1,065^t = 3500 (1,065^t + 10,667)$$

$$7000 \cdot 1,065^t - 3500 \cdot 1,065^t = 3500 \cdot 10,667$$

$$3500 \cdot 1,065^t = 3500 \cdot 10,667 \quad | : 3500$$

$$1,065^t = 10,667 \quad | \ln$$

$$\ln(1,065^t) = \ln(10,667)$$

$$t = \frac{\ln(10,667)}{\ln(1,065)} \approx 37$$

$$\approx 37,6 \text{ minuter}$$

24. Insättning varje fredag; 100 kr. Värdet minskar med 2% varje vecka.

Scenariot ovan kan ses som en geometrisk summa.

Geometrisk summa: $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$, $a_1 = 100$

$$k = 1 - 0,02 = 0,98.$$

$$S_n = 100 \frac{0,98^n - 1}{0,98 - 1} = 100 \frac{0,98^n - 1}{-0,02}$$

$$a) S_{52} = 100 \cdot \frac{0,98^{52} - 1}{-0,02} = 3251,257... \approx \underline{\underline{3251 \text{ kr}}}$$

b) På lång sikt så kommer summan att närma sig noll.

$$S_n \rightarrow 0 \Rightarrow 100 \frac{0,98^n - 1}{-0,02} = 0$$

$$\frac{100 \cdot 0,98^n - 100}{-0,02} = 0$$

$$\frac{-100 \cdot 0,98^n + 1000}{-0,02} = 0 \quad | -5000$$

$$\frac{100 \cdot 0,98^n}{-0,02} = -5000 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{100 \cdot 0,98^n}{0,02} = 5000$$

När summan närmar sig noll så närmar sig fondandelarna (n) närmevärdet 5000.

25. Newtons avkylningslag: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, där T_0 är omgivningens temperatur.

$$T = \gamma, \quad T = T_h + T_p = ce^{kt} + 10$$

$$T_h = ce^{kt} \quad T_p = T_0 = 10$$

$$T(0) = c \cdot 1 + 10 = 75 \Rightarrow c = 75 - 10 = 65$$

$$T(t) = 65e^{kt} + 10$$

$$\text{Bestämning av } k: T(6) = 65e^{k \cdot 6} + 10 = 30$$

$$65e^{6k} = 20 \quad | :65$$

$$e^{6k} = \frac{20}{65} \quad | \ln$$

$$6k = \ln(20/65) \quad | :6$$

$$k = \frac{\ln(20/65)}{6} = -0,196... \approx -0,2$$

$$T(t) = 65e^{-0,2t} + 10$$

$$\frac{dT}{dt} = -0,2(T - 10) = -0,2 \cdot 65e^{-0,2t} + 0,2 \cdot 10 = -0,2 \cdot 65e^{-0,2t}$$

$$\text{Verifiering: } \frac{dT}{dt} = -0,2 \cdot 65e^{-0,2t}$$

$$\text{Svar: } \frac{dT}{dt} = -0,2(T - 10), \text{ då } T(t) = 65e^{-0,2t} + 10$$

$$26. \quad 11^{2n} + 5^{2n+1} - 6 \mid 24$$

$$11^{2n} + 5^{2n+1} - 6 \equiv 0 \pmod{24}$$

$$(11^2)^n + (5^2)^n \cdot 5 - 6 \equiv 0 \pmod{24}$$

$$(121)^n + (25)^n \cdot 5 - 6 \equiv 0 \pmod{24}$$

$$\begin{aligned} (121)^n &\equiv 1 \pmod{24} \\ (25)^n &\equiv 1 \pmod{24} \end{aligned}$$

$$1^n = 1$$

$$(121)^n + (25)^n \cdot 5 - 6 \equiv 0 \pmod{24} =$$

$$= 1^n + 1^n \cdot 5 - 6 = 1 + 1 \cdot 5 - 6 = 0$$

V.S.V

27.

a): $M = \{40\}$, $F = \{30\}$, $K = \{20\}$

b): $(M \cap F) \cap K = \{15\}$

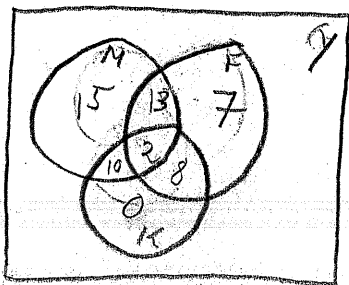
c): $(M \cap K) \cap F = \{12\}$

d): $(F \cap K) \cap M = \{10\}$

e): $(M \cap F \cap K) = \{x\}$

f): $(M \cap F \cap K)^c = \{y\}$

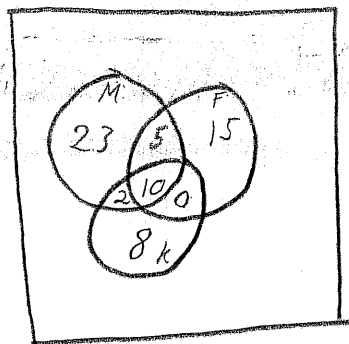
Ex 1:



$x_{\min} = 2$

$y_{\max} = 70 - (15 + 13 + 10 + 8 + 7 + 2) = 70 - 55 = 15$

Ex 2:



$y_{\min} = 70 - (23 + 15 + 8 + 5 + 2) = 70 - 63 = 7$

$x_{\max} = 10$

Da $x = 2$ så blir $y = 15$, da $x = 10$ så blir $y = 7$.

Svar: $2 \leq x \leq 10$, $7 \leq y \leq 15$.

Kursprov Matte 5, vt 2016

(10) Bestäm det minsta pos. heltal n för vilket $n!$ är delbart med 3^8 .

Lösning: " $n!$ delbart med 3^8 " innebär $\frac{n!}{3^8} = \text{heltal}$, dvs:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{8 \text{ styck}}} = \text{heltal}$$

Utreckla $n!$
och förkorta:

Stopp! →

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & \cancel{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \cancel{18} \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\ \cancel{1} & & \cancel{2} & & & \cancel{3} & & & \cancel{3} & & & \cancel{3} & & & \cancel{3} & & & \cancel{3} & \end{array}$$

$$\frac{18!}{3^8} = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 2 = \text{Heltal}$$

↓
18 är det minsta tal för vilket $18!$ är delbart med 3^8 .