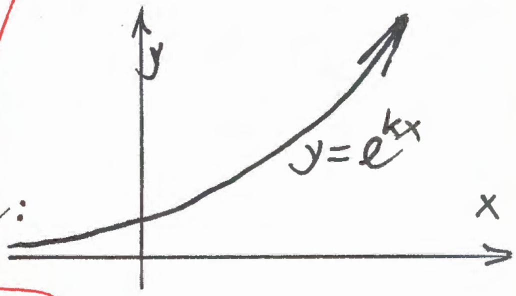
Tillväxt med begränsningar

Modell för befolkningstillväxt: $y' = ky$ $k = \overset{\text{given}}{\text{const.}} > 0$

Orealistisk: Lösningen $y = e^{kx}$ innebär oändlig tillväxt:

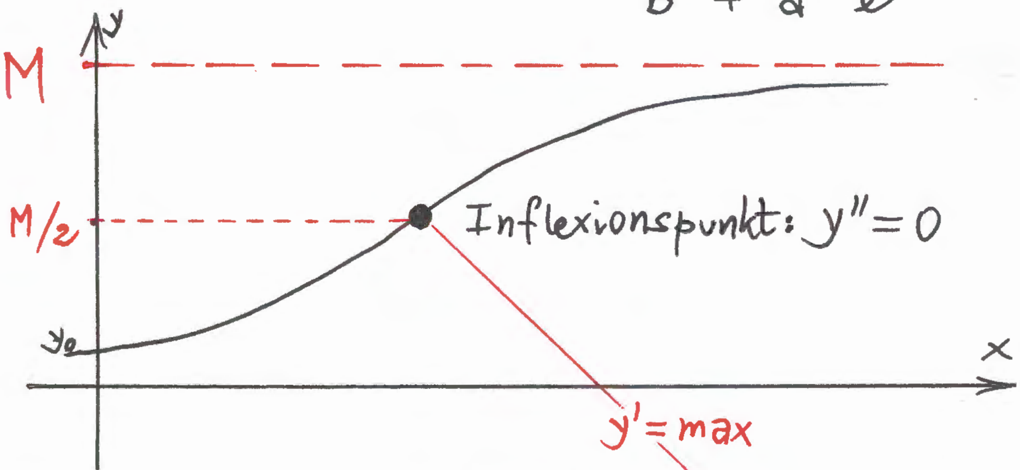


Rimligare: $y' = ky - by^2$ $k, b = \text{const.}$ (givna)

Svårlöst! "Den logistiska ekvationen" : Icke-linjär

Lösningen: $$y = \frac{k}{b + d \cdot e^{-kx}}$$ $d = \frac{k - by_0}{y_0}$

$M =$ Maximal storlek



S-kurva

$y' = ky - by^2$ Betrakta y' som en funktion av y:

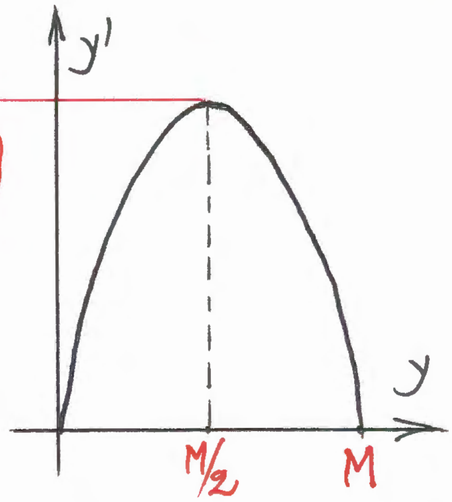
$y'' = k \cdot y' - 2by \cdot y' = 0 \quad | /y' \neq 0$

$k - 2by = 0$

$M = \frac{k}{b}$ $k = 2by$

$\frac{M}{2} = \frac{k}{2b} = y$

Störst tillväxt för $y = \frac{M}{2}$



$b = \frac{k}{M}$

$$y' = ky - by^2 = ky - \frac{k}{M}y^2 = \boxed{ky \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)}$$