Lektion 8

Linjära modeller

Kaffe i termos

Efter frukosten häller Jennifer och Leo kaffet i en termos för att ta en höstpicknick. Då var kaffets temperatur 93˚C. Jennifer säger att **kaffets temperatur kommer att avta med 15˚ C per timme**. När har temperaturen sjunkit till 40˚C då kaffet inte längre anses vara drickbart. Ställ upp en funktion, rita dess graf och avläs lösningen från grafen.

Matematisk modellering

Att beskriva en verklighet i matematiska termer kallas för *modellering*.
Resultatet är en matematisk *modell*.
De matematiska termerna kan vara *algebraiska uttryck, formler, samband, ekvationer, funktioner* eller andra matematiska begrepp. För att formulera modellen definierar vi två variabler:

$$x = \text{Tiden i timmar efter kaffet hälldes i termosen}$$

$$y = \text{Kaffets temperatur i } ^\circ \text{ Celsius}$$

Sedan översätter vi Jennifers påstående (**röd**markerat i uppgiften ovan) till matematik:

Efter 1 timme är kaffets temperatur $y = 93 - 15 \cdot 1$
Efter 2 timmar är kaffets temperatur $y = 93 - 15 \cdot 2$
Efter 3 timmar är kaffets temperatur $y = 93 - 15 \cdot 3$
Efter x timmar får vi $\ldots \quad \ldots$

Modellen: $\boxed{y = 93 - 15 \cdot x}$

Modellen är *linjär* därför att den högsta förekommande exponenten av x i modellen är 1. Modellen visar att temperaturen minskar med lika stor mängd varje timme, nämligen 15˚C. Modellen ovan är en *funktion*. För att visualisera den ritar vi dess graf i Python:

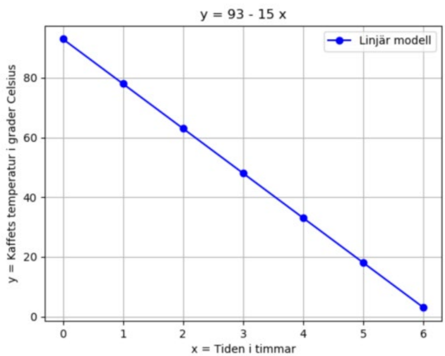
Öppna Pythons IDLE. Välj i kommandofönstret (Shell) menyn **File → New File**

Skriv i IDLEs editfönster (Untitled) följande kod (utan radnumren):

```
# Kaffe_Lin.py
# Ritar grafen till Jennifers linjära modell y = 93 - 15 x
# Använder det externa biblioteket matplotlib för grafritning

import matplotlib.pyplot as plt                     # Importerar modulen pyplot
                                                    # från matplotlib
def f(x) :                                          # Definierar funktionen
    return 93 - 15*x                                # y = f(x) = 93 - 15x

x = [  0,    1,    2,    3,    4,    5,    6]     # Funktionens
y = [f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)]    # värdetabell
plt.plot(x, y, 'o-b')                               # Ritar grafen till y = f(x)
plt.grid()                                          # Ritar rutnät
plt.title('y = 93 - 15 x')                          # Skriver rubrik
plt.xlabel('x = Tiden i timmar')                    # Skriver text till x-axeln
plt.ylabel('y = Kaffets temperatur i grader Celsius')      # y-axeln
plt.legend(['Linjär modell'])                       # Sätter en textruta (Legend)
plt.show()                                          # Visar grafen på skärmen
```



För att kunna köra programmet ovan i Python och få grafen ritad måste vi installera biblioteket matplotlib med kommandona:

PC: pip install matplotlib

Mac: pip3 install matplotlib

från Windows *Kommandotolk* på PC resp. *Terminal*-fönstret på Mac. Mer utförliga instruktioner finns i appendix **B** på sid 103. Från och med nu kan vi i Python rita grafer till funktioner. På köpet har vi fått matplotlib som är ett kraftfullt programbibliotek för utveckling av grafiska applikationer, men som inte ingår i Pythons standarduppsättning.

Välj i IDLE:s editfönster menyraden **File → Save As…**, välj lämplig plats på din dator, ange filnamnet Kaffe_Lin.py och klicka på **Spara**. Välj i editfönstrets menyrad: **Run → Run Module**.

Bilden ovan visar grafen till funktionen $y = 93 - 15\ x$, en *linjär modell* för kaffets avsvalnande. Grafen visar att kaffets temperatur var 93˚C i början, vilket bekräftas algebraiskt av modellen när tiden x = 0 sätts in i den: $y = 93 - 15 \cdot 0 = 93 - 0 = 93$. Följer man den horisontella linjen i grafens rutnät från y-värdet 40 kan man även avläsa från grafen:

Kaffet är inte längre drickbart (40˚ C) efter ca. 3,5 timmar.

Kodförklaring

`Rad 5`	`pyplot` är en fördefinierad kodmodul i det externa biblioteket `matplotlib` som importeras här till vårt program för att vi ska kunna använda funktionerna `plot()` och andra som står på raderna `12-18`. Vi gör det genom att med `as plt` definiera ett kort alias till det långa namnet `matplotlib.pyplot`.
`Rad 7-8`	Så här definieras en *funktion* i Python. Funktionens *huvud* inleds med `def`. Rad `8` är funktionens *kropp* och består här endast av en `return`-sats. Uttrycket efter `return` beräknas med ett värde på parametern `x` och returneras till funktionsnamnet `f` när funktionen anropas.
`Rad 11`	Här *anropas* funktionen `f(x)` sju gånger inuti en s.k. *lista*. I Python kodas en lista med `[ ]`. I raden `10` innan hade `x`-värdena definierats i en annan lista. Båda listor utgör det vi i den manuella grafritningen kallar för funktionens *värdetabell*.
`Rad 12`	Här plottas `x`- och `y`-listorna från raderna `10-11` mot varandra. Dvs motsvarande par av `x`- och `y`-värdena tas från listorna och prickas som punkter i koordinatsystemet. Punkterna förbinds med varandra och ger grafen. Den kryptiska koden `'o-b'` i `plot()`-satsen specifierar grafens linjetyp: Ringen `o` betyder att punkterna ritas med ifyllda ringar. Strecket `-` betyder att punkterna förbinds med en genomdragen linje. `b` betyder att kurvans färg blir blå.

Frågor

1. Varför förväntas grafen till funktionen y = 93 – 15 x bli en rät linje med negativ lutning?
2. Läs av från grafen på sid 42: **a)** Kaffets temperatur efter 3 timmar. **b)** Tiden då temperaturen sjunkit till 60 ˚ C. Svara i timmar och minuter. Kontrollera dina avläsningar algebraiskt.
3. Kan kaffets temperatur enligt modellen bli 0 ˚ C. Om ja, när? Om nej, varför inte?
4. Vilken programvara ger möjligheten att skapa en grafisk miljö och rita grafer i Python?
5. Vilken modul i den nya programvaran måste importeras för att kunna rita grafer?
6. Vilken funktion i den importerade modulen ritar själva grafen till en funktion i Python?
7. Med vilken kod i Pyhton kan man skriva en funktions x-och y-värden till en värdetabell?

Övningar

1801

a) Modifiera programmet **`Kaffe_Lin`** (sid 42) genom att ändra värdena i funktionens värdetabell. Gör om **`x`**-listan till **`0, 2, 4, 6`**. Gör motsvarande ändringar i **`y`**-listan och rita om grafen. Varför blir det samma graf?

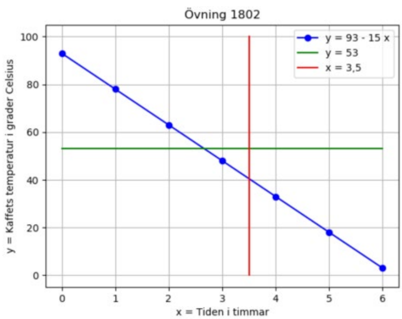
b) Kan man ytterligare minska antalet punkter i värdetabellen och få samma graf om man vet att grafen är en rät linje? Gör det till det minsta möjliga antalet punkter och rita om grafen.

c) Ta i grafen på sid 42 den räta linjens två ändpunkter (0, 93) och (6, 3) och låt Python beräkna med dem linjens lutning. Får du samma värde som den räta linjens ekvation visar?

1802

För att bättre kunna avläsa kaffets temperatur efter 3,5 timmar och tiden då temperaturen sjunkit till 53° C från grafen, komplettera programmet **`Kaffe_Lin`** (sid 42) så här:

Lägg till kod för graferna till de två räta linjerna $y = 53$ (grön) och $x = 3{,}5$ (röd) så att alla tre räta linjer ritas i ett och samma koordinatsystem:



Avläs nu från denna graf:

a) Kaffets temperatur efter 3,5 timmar.

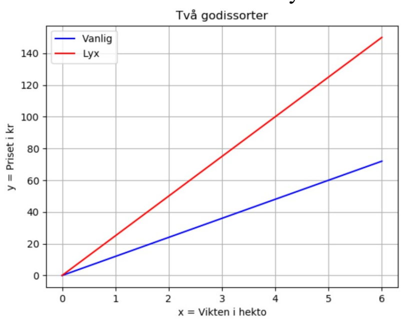
b) Tiden då temperaturen sjunkit till 53° C och kaffet anses inte längre som drickbart. Svara i hela timmar och minuter. Kontrollera dina avläsningar algebraiskt.

1803

En godisaffär säljer två sorters godis. Den vanliga sorten kostar 12 kr per hekto, lyxvarianten 25 kr/hg.

a) Ställ upp en modell för kostnaden av varje godissort med y för priset i kr och x för vikten i hekto.

b) Använd modellerna från a) för att i ett pythonprogram rita deras grafer i ett och samma koordinatsystem:



c) Alex som vill köpa vanlig godis för 40 kr i affären ovan undrar hur mycket mer han får betala för samma mängd godis om han väljer lyxvarianten istället. Lös uppgiften åt Alex både algebraiskt och grafiskt.