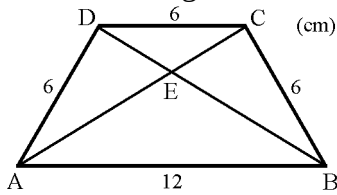
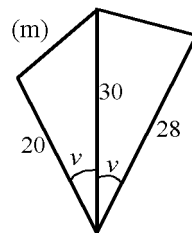


Extrauppg. Ma4 Trig. Nivå A - C

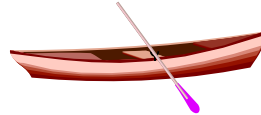
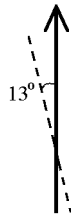
1. Bestäm arean av triangeln AEB i nedanstående figur.



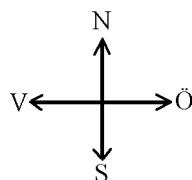
2. I en cirkel med radien r inskrives en regelbunden 8-hörning. Hur många procent av cirkelns area upptar 8-hörningen? Svara med en decimal.
3. Man ska anlägga en gräsmatta med mått enligt figuren nedan. Hur stor ska vinkeln v vara om den sammanlagda arean av de två triangelarna ska vara 325 m^2 ?



4. En person rör en båt med hastigheten $1,5 \text{ m/s}$ när det är vindstilla. Vid ett tillfälle blåser det i en riktning från vänster i figuren en vind som driver båten med hastigheten $0,40 \text{ m/s}$. Som en följd därav måste personen då ro båten i den streckade linjens riktning (se figur) för att båten ska följa pilens riktning. Beräkna båtens hastighet.



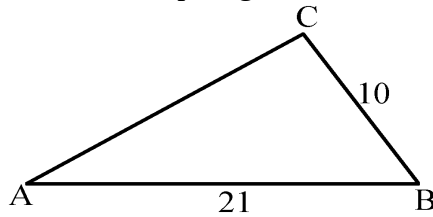
5. I en triangel ABC är $BC = 4,0 \text{ cm}$ och $AC = 5,0 \text{ cm}$. Vinkeln B är dubbelt så stor som vinkeln A . Beräkna triangelns vinklar.
6. I en triangel ABC är $AC = BC = 10 \text{ cm}$ och $AB = 8,0 \text{ cm}$. Hörnet A sammanbinds med en punkt D på sidan BC . Beräkna vinklarna i triangeln ABD om $AD = 7,5 \text{ cm}$.
7. Från ett fartyg som med konstant hastighet går i nordostlig riktning siktar man kl. 8.00 en fyr i en riktning som från norr avviker 20° mot öster. Kl. 9.00 ser man fyren rakt i norr. Hur dags kan man vänta sig att se fyren rakt i väster? Grafisk lösning godtas ej. Se väderstreck i figuren nedan.



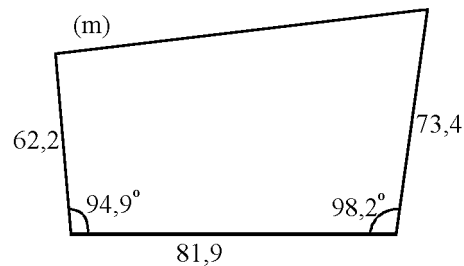
8. Arean av en triangel med spetsiga vinklar är 84 cm^2 . Två sidor är 13 cm respektive 14 cm . Visa att sinus för triangelns minsta vinkel är exakt $4/5$.

[Skriv här]

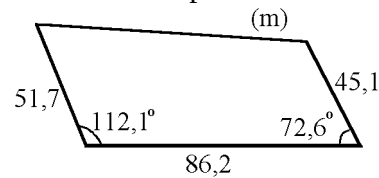
9. Arealen av triangeln ABC i figuren är 84 cm^2 . Visa med exakta räkningar att $\sin A = \frac{8}{17}$ om man vet att vinkeln B är spetsig.



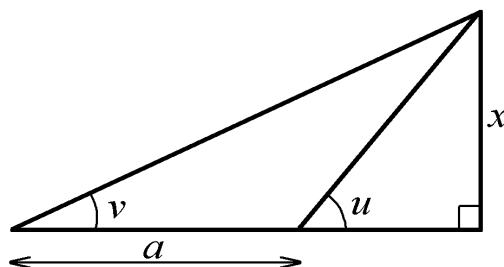
10. Ett företag köper en industritomt med mått enligt figuren nedan. Vad kostar tomten om marken kostar 500 kr/m^2 ? Avrunda svaret till närmaste tusental kronor.



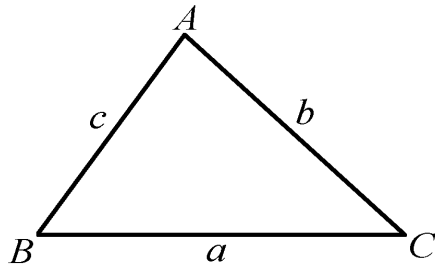
11. Ett företag ska köpa mark av en kommun och erbjuds en tomt med mått enligt nedanstående figur. Vad kostar marken per m^2 om tomtpriset är 1 600 000 kronor?



12. I en triangel ABC är sidan AB $12,0 \text{ cm}$. Från hörnet A dras en rät linje som träffar sidan BC i punkten D $5,00 \text{ cm}$ från B . Vinkeln BAD är $20,0^\circ$ och triangeln ADC är likbent, dvs $AD = DC$. Bestäm arean av triangeln ABC .
13. I fyrhörningen $ABCD$ är sidorna AB och BC vardera $8,0 \text{ cm}$, sidan CD är $6,0 \text{ cm}$ och sidan DA är $10,0 \text{ cm}$. Vinkeln A är 60° . Beräkna fyrhörningens övriga vinklar. Svara i hela grader. (Ledning: en av vinklarna fordrar uträkning med många gällande siffror för att avrundningen ska bli rätt.)
14. Se figuren nedan. Inför hjälpvariabler och visa att $x = \frac{a \sin u \cdot \sin v}{\sin(u - v)}$.

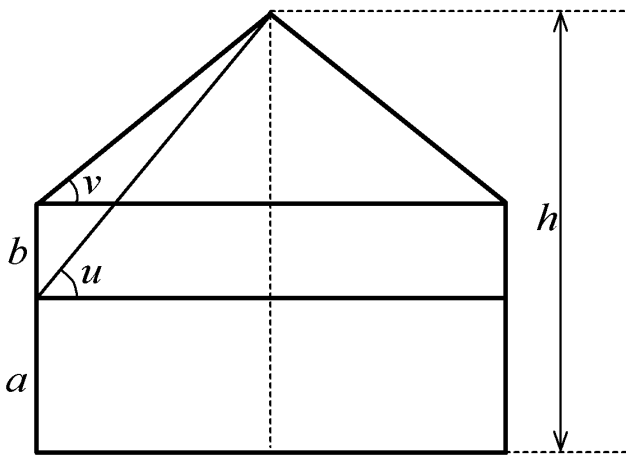


15. I figuren nedan har man ritat triangeln ABC . Visa att $c = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}$.



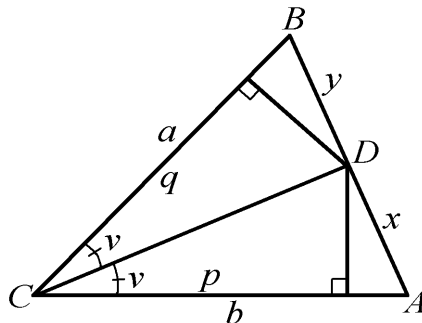
16. I figuren nedan har man ritat profilen av ett hus. Visa att husets totala höjd h med de givna beteckningarna kan skrivas

$$h = a + b + \frac{b \cos u \sin v}{\sin(u-v)}$$



17. I figuren nedan har man ritat triangeln ABC , där sidan BC har längden a , sidan AC har längden b och punkten D delar sidan AB i två delar med längderna x och y . CD är bisektris till vinkeln C och längden av CD är d . Man har dragit två höjder för att åstadkomma rätvinkliga trianglar, där de i figuren långa kateterna har längderna p och q .

- a) Visa att $a + b > 2d \cos v$.
- b) Använd nu cosinussatsen på både triangeln ACD och triangeln BCD för att bevisa följande påstående:
Bisektrisen CD delar sträckan AB mitt itu endast om $a = b$, dvs. endast om triangeln ABC är likbent.



18. Förenkla så långt som möjligt uttrycket $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x$.

Svara exakt utan rottecken i nämnaren.

[Skriv här]

19. Visa att $\frac{\sin x}{1 + \tan x} = \frac{\cos x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}$

20. Visa att $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{\tan x}$.

21. Visa att $\frac{2 \sin 2x}{1 + \tan 2x} = \frac{\sin 4x}{\cos 2x + \sin 2x}$.

22. Visa att $\frac{1 - \tan^2 2x}{1 + \tan^2 2x} = \cos 4x$

23. Visa att $\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \cos x$

24. Visa att $\tan \frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v}$

25. Visa att $\frac{(1 + \tan x)^2}{2} = \frac{1 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}$

26. Visa att $\frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)} = \frac{\sin 2x \cdot \tan 2x}{4}$

27. Visa att $\frac{\sin(x + \pi/4)}{\sin x} + \frac{\sin(x - \pi/4)}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2x}$

28. Visa att $\frac{\sin(x + \pi/4)}{\sin x} + \frac{\cos(x - \pi/4)}{\cos x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sin 2x}$

29. Visa att $2 \tan \frac{x}{2} - \frac{2 \sin^3 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \sin x$

30. Visa att $\left(1 - \frac{2 \tan x}{\sin 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{2 \tan x}{\tan 2x}\right)^2$

31. Visa att $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{1 + \cos x - \sin^2 x}$.

32. Visa att $\sin^4 x$ kan skrivas om så att man får $\frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}$. Beviset skall utföras från $\sin^4 x$ och inte genom förenkling från svaret.

33. Vad är $\sqrt{x^2}$?

Redan i kurs A lär man sig tillräckligt för att veta att $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ och att $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. Men det är nog mycket sällsynt att någon i kurs A skriver ner en generell regel.

a) Använd informationen i exemplen ovan till att ange den generella regeln för värdet av $\sqrt{x^2}$.

b) Visa med hjälp av denna regel att

$$\sqrt{\frac{2\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - 2\sin^4 x}} + 1 = \pm \frac{1}{\sin x}$$

Motivera särskilt minustecknet.

Ange också ett intervall där minustecknet gäller.

34. Betrakta formlerna $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$
 $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Visa att man ur dem (utan att förutsätta någon annan trigonometrisk formel som känd) kan härleda formeln $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

35. Lös fullständigt ekvationen $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Svara exakt i radianer.
36. Lös ekvationen $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Svara exakt.
37. Skriv funktionen $y = -2\sin x + \sqrt{12}\cos x$ på formen $y = m \cdot \sin(x+v)$.
Lös därefter ekvationen $-2\sin x + \sqrt{12}\cos x = 0$. Räkna exakt i radianer.
38. Skriv $f(x) = \cos 2x - \sin 2x$ på formen $f(x) = r \cdot \sin(2x+v)$, där $r > 0$ och $0 < v < \pi$. Lös därefter ekvationen $f(x) + 1 = 0$
39. Skriv $f(x) = \frac{3}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ på formen $f(x) = r \cdot \sin(x+v)$. Lös därefter ekvationen $\frac{3}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Svara exakt i radianer.
40. Lös ekvationen $\cos(2\pi - 4x) = 0$ då $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Svara exakt.
41. Lös ekvationen $\tan(\pi - 5x) = -\frac{1}{4}$ då $0 \leq x \leq \pi$. Svara i radianer med tre decimaler.
42. Lös fullständigt ekvationen $\sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{8} - \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{8} = \sin x$. Svara exakt.
43. Lös fullständigt ekvationen $\sin 3x = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Svara exakt i radianer.
44. Lös ekvationen $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ då $0 \leq x \leq 2\pi$.
I lösningen ska ekvationen först skrivas på formen $\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$.
45. Lös fullständigt ekvationen $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$. Svara exakt.
46. Rita kurvan $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.
Lös därefter olikheten $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{2}$.
De vinklar där funktionsvärdet är $-\frac{1}{2}$ ska bestämmas algebraiskt. Svara exakt.

[Skriv här]

47. Funktionen $y = A\cos(x + v)$, $A > 0$, $-\pi \leq v \leq \pi$, antar i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ sitt största värde 3 för $x = \frac{\pi}{4}$. Bestäm A och v .

Rita kurvan i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Beräkna också exakt koordinaterna för kurvans minimipunkt i intervallet.

48. Lös nedanstående problem.

- a) Upprita kurvan $y = 4 - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.
- b) Kurvan har i intervallet två stycken maximipunkter. Beräkna algebraiskt koordinaterna i dessa punkter. Svara exakt.

49. Lös nedanstående problem.

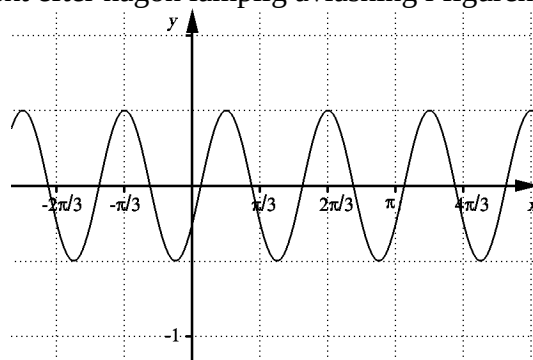
- a) Upprita kurvan $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ i intervallet $0 \leq x \leq 4\pi$.
- b) Kurvan har i intervallet en minimipunkt. Beräkna algebraiskt minimipunktens koordinater. Svara exakt.

50. Lös nedanstående problem.

- a) Bestäm perioden för kurvan $y = 2 - 3\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$.
- b) Bestäm koordinaterna för de två första maximipunkterna som kurvan har till höger om y-axeln. Svara exakt.

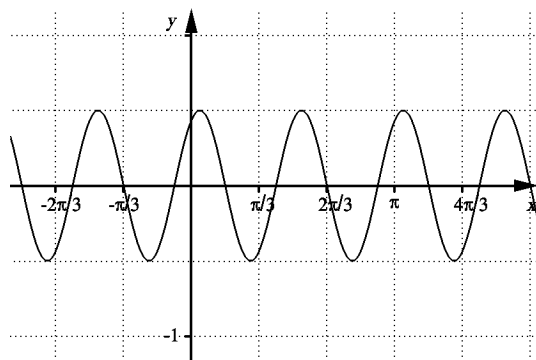
51. Visa att ekvationen för kurvan $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + 10\right)$, där x mäts i radianer, kan skrivas om så att man ser att kurvan är en sinusfunktion, som är förskjuten åt höger med en förskjutning som ligger mellan 0 och 2π radianer.
Ge förskjutningen både exakt och med ett närmevärde med två decimaler.

52. I figuren nedan är grafen till en funktion av typen $y = A\sin(kx + v)$ ritad. Förskjutningen måste bestämmas algebraiskt efter någon lämplig avläsning i figuren. Bestäm kurvans ekvation.



53. I figuren nedan är grafen till en funktion av typen $y = A \cos(kx + v)$ ritad.

Bestäm kurvans ekvation om man vet att den går genom punkten $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.



54. Man har funktionen $f(x) = B + A \sin\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$, där A och B är positiva konstanter. Man vet att funktionens största värde är 50 % större än dess minsta värde och att $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 8,25$. Bestäm konstanterna A och B .

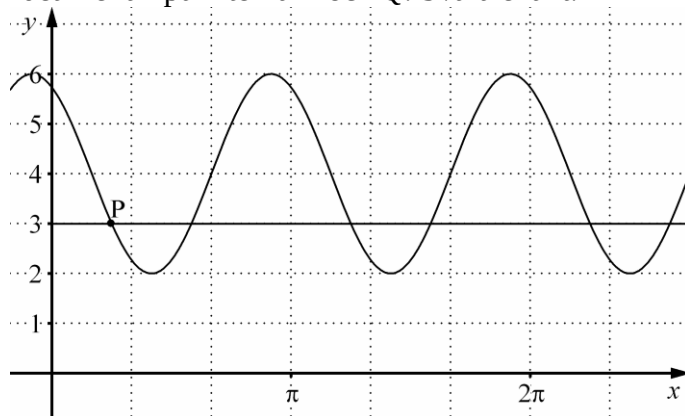
55. Man har funktionen $f(x) = B - A \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, där A och B är positiva konstanter. Man vet att funktionens största värde är tre gånger så stort som dess minsta värde.

Man vet också att $f\left(\frac{\pi}{24}\right) = 2\sqrt{2} - 1$. Bestäm konstanterna A och B i exakt form.

56. I figuren nedan finns en funktion av typen $y = B + A \cos k(x + v)$ ritad. På kurvan har man markerat punkten P med y -koordinaten 3.

a) Bestäm kurvans ekvation. Ledning: En metod för att bestämma förskjutningen är att betrakta kurvans skärningspunkter med mittlinjen och använda kurvans symmetri.

b) Om man drar linjen $y = 3$ i diagrammet ser man sex skärningspunkter i diagrammet. Kalla skärningspunkt nr 10 till höger om y -axeln för Q . Beräkna avståndet mellan punkterna P och Q . Svara exakt.

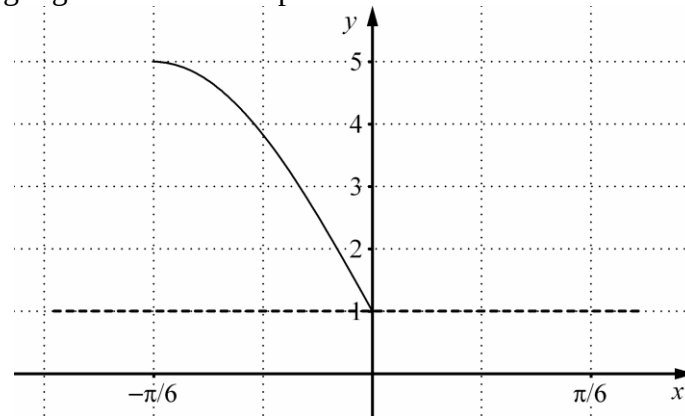


[Skriv här]

57. I figuren nedan har man ritat en liten del av en kurva av typen $y = B + A\cos k(x + v)$. Man ser i figuren bland annat var kurvan har en av sina maximipunkter och en punkt där den skär "mittlinjen".

- Använd informationen i figuren för att bestämma kurvans period.
- Bestäm kurvans ekvation.
- Ange ekvationen för en valfri kurva av typen $y = B + A\sin k(x + v)$ som uppfyller följande villkor:
 - Vinkeln mäts i radianer.
 - Största funktionsvärdet är 90 och minsta värdet är 50.
 - Kurvan är förskjuten åt höger.
 - Kurvan ska skära linjen $y = 80$ i precis två punkter mellan vinklarna 0 och 24 radianer.

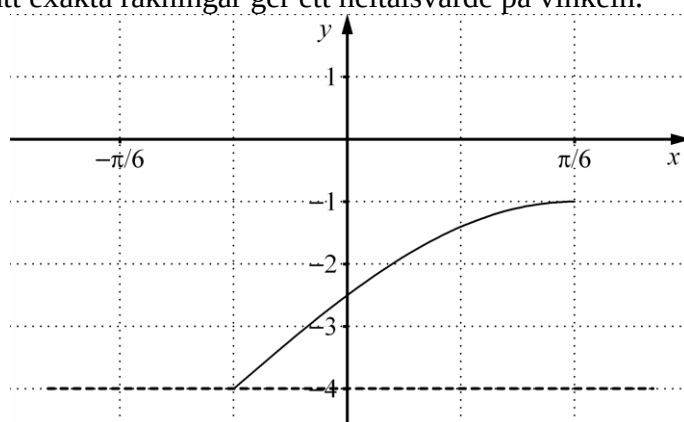
De två vinklarna skall beräknas och det skall finnas bevis för att detta är de enda vinklarna där kurvan skär linjen. Din lösning anses särskilt värdefull om du väljer värden på k och v så att exakta räkningar ger heltalsvärden på vinklarna.



58. I figuren nedan har man ritat en liten del av en kurva av typen $y = B + A \sin k(x + v)$. Man ser i figuren bland annat var kurvan har en av sina maximipunkter och en punkt där den skär "mittlinjen".

- Använd informationen i figuren för att bestämma kurvans period.
- Bestäm kurvans ekvation.
- Ange ekvationen för en valfri kurva av typen $y = B + A \cos k(x + v)$ som uppfyller följande villkor:
 - Vinkeln mäts i radianer.
 - Största funktionsvärdet är -10 och minsta värdet är -50 .
 - Kurvan är förskjuten åt vänster.
 - Kurvan skär linjen $y = -40$ i endast en punkt mellan vinklarna 0 och 12 radianer.

Vinkeln skall beräknas och det skall finnas bevis för att detta är den enda vinkeln där kurvan skär linjen i det aktuella intervallet. Din lösning anses särskilt värdefull om du väljer värden på k och v så att exakta räkningar ger ett heltalsvärde på vinkeln.

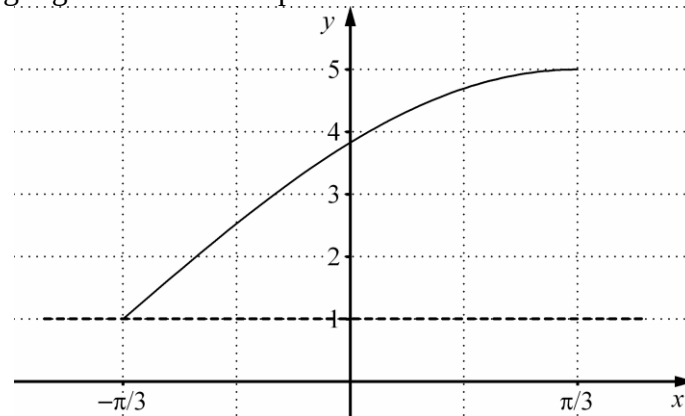


[Skriv här]

59. I figuren nedan har man ritat en liten del av en kurva av typen $y = B + A\cos k(x + v)$. Man ser i figuren bland annat var kurvan har en av sina maximipunkter och en punkt där den skär "mittlinjen".

- Använd informationen i figuren för att bestämma kurvans period.
- Bestäm kurvans ekvation.
- Ange ekvationen för en valfri kurva av typen $y = B + A\sin k(x + v)$ som uppfyller följande villkor:
 - Vinkeln mäts i radianer.
 - Största funktionsvärdet är 1 och minsta värdet är -7.
 - Kurvan är förskjuten åt vänster.
 - Kurvan ska skära linjen $y = -5$ i precis två punkter mellan vinklarna 0 och 12 radianer.

De två vinklarna skall beräknas och det skall finnas bevis för att detta är de enda vinklarna där kurvan skär linjen. Din lösning anses särskilt värdefull om du väljer värden på k och v så att exakta räkningar ger heltalsvärden på vinklarna.



60. En viss tid på året varierar vattendjupet y meter vid en brygga med tidvattnet approximativt enligt formeln

$$y = 2 + 4\sin \frac{\pi(t-1)}{6}, \text{ där } t \text{ är tiden i timmar från midnatt.}$$

Vilka tider på dygnet är botten nedanför bryggan torrlagd?

61. Den största nivåskillnad som uppnås mellan låg- och högvatten på grund av tidvatten är 15,5 meter (i *Bay of Fundy*, vid gränsen mellan USA och Kanada).

Antag att vattendjupet y meter på en plats vid en viss tidpunkt på året approximativt kan beskrivas med formeln

$$y = 3,5 + 7,0\sin \frac{\pi(t+2)}{6}, \text{ där } t \text{ är tiden i timmar från midnatt.}$$

- Ange perioden för tidvattnets växlingar.
- Under vilka tidpunkter på dygnet är havsbotten torrlagd?

62. Många av de välkända figurerna från Ankeborg har åkt på semester till en kuststad. Björnligan rånar en juvelaffär och bytet blir ett dyrbart halsband. Kommissarie Karlsson är dock tjuvarna på spåren och under sin flykt kastar Björnligan halsbandet på ett ställe i hamnen där det inte är så djupt. Rånet inträffar klockan 9 och strax efter kastar Björnligan halsbandet på den nämnda platsen. Bovarna har dock förbisett tidvattnets inverkan, som medför att botten vissa tider på dygnet är torrlagd på den plats där de kastat halsbandet. Dessa tider kan en person, som går förbi, se halsbandet ligga på hamnens botten. Övriga tider är halsbandet täckt av hamnens smutsiga vatten, så att man inte kan se det.

Vattendjupet y meter, på den plats där halsbandet ligger, varierar enligt formeln

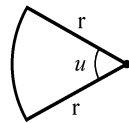
$$y = 0,75 + 1,5 \sin \frac{\pi(x+3)}{6}, \text{ där } x \text{ är tiden i timmar räknat från midnatt.}$$

Platsen besöks endast av följande personer i den tidsordning som anges:

- ♦ Kommissarie Karlsson passerar platsen på sin rond kl. 11.
- ♦ Jan Långben tittar på båtar i hamnen mellan kl. 12 och kl. 13
- ♦ Björnligan smyger ner i hamnen kl. 15, för att se om dom kan upptäcka halsbandet.
- ♦ Knatte, Fnatte och Tjatte kommer ner till hamnen för att fiska mellan kl. 16 och kl. 18
- ♦ Kalle Anka och Kajsa kommer till platsen för att sitta på en bänk och titta på solnedgången mellan kl. 21 och kl. 22.
- ♦ Eftersom Musse Pigg ofta hjälper kommissarie Karlsson, spanar han i hamnen kl. 23.

Vem eller vilka kommer att hitta halsbandet? Generell algebraisk lösning med noggrann förklaring av alla möjliga tidsintervall krävs. Grafisk lösning godtas inte.

63. En cirkelsektor (se figur) har omkretsen 10 cm



- a) Bestäm vinkeln u (i radianer) så att sektorns area är så stor som möjligt.
- b) Beräkna den maximala arean.
- c) Visa att $\frac{5}{\pi+1} < r < 5$

F A C I T

1. $12\sqrt{3} \approx 21 \text{ cm}^2$
2. 90,0%
3. 27°
4. 1,2 m/s eller 1,7 m/s
5. $A \approx 51^\circ$ $B \approx 103^\circ$ $C \approx 26^\circ$
6. Fall 1: $36^\circ, 66^\circ, 78^\circ$
Fall 2: $11^\circ, 66^\circ, 102^\circ$
7. Kl. 10.45
8. ---
9. ---
10. 3 015 000 kronor
11. 399 kronor/m²
12. 46,4 cm² eller 111 cm²
13. $111^\circ, 80^\circ$ och 108° ($108,498^\circ$)
14. ---
15. ---
16. ---
17. ---
18. $\frac{\sin x}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x}{3}$
19. ---
20. ---
21. ---
22. ---
23. ---
24. ---
25. ---
26. ---
27. ---
28. ---
29. ---
30. ---
31. ---
32. ---

33. a) $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$

b) Eftersom kvadratroten ur ett tal alltid är större än noll, måste man infoga ett minustecken i intervall där $\sin x < 0$. Ett intervall där minustecknet gäller är $\pi < x < 2\pi$.
Obs att $x \neq n\pi$

34. ---

35. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + n \cdot 2\pi \text{ eller} \\ x = \frac{11\pi}{12} + n \cdot 2\pi \end{cases}$

36. $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

37. $\begin{cases} y = 4 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \\ x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi \end{cases}$

38. $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \text{ eller} \\ x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \end{cases}$

39. $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} \\ x_2 = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1 = -\frac{3\pi}{8}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{8} \\ x_3 = \frac{\pi}{8}, \quad x_4 = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$

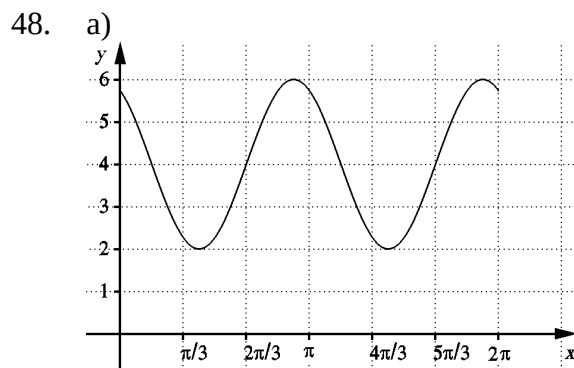
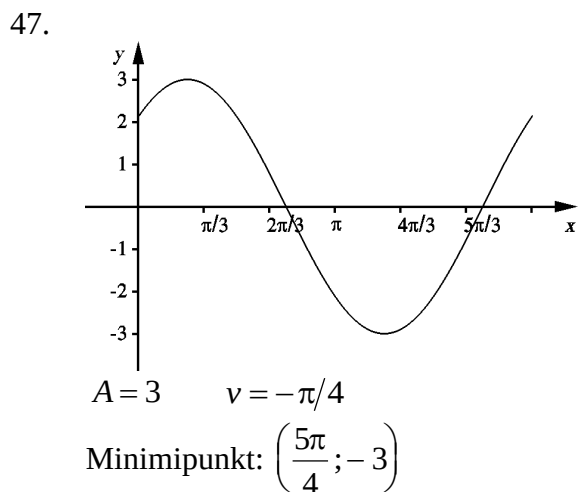
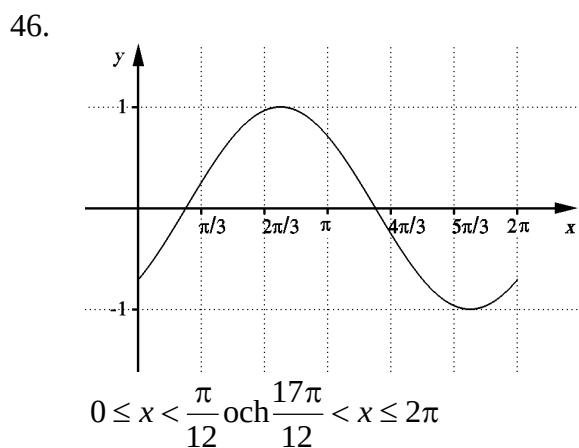
41. $\begin{cases} x_1 \approx 0,049, \quad x_2 \approx 0,677 \\ x_3 \approx 1,306, \quad x_4 \approx 1,934 \\ x_5 \approx 2,562 \end{cases}$

$$42. \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + n \cdot 2\pi \text{ eller} \\ x = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

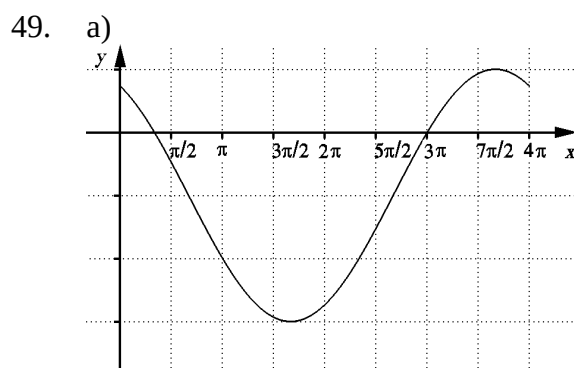
$$43. \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ eller} \\ x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} x_1 = \frac{3\pi}{8}, & x_2 = \frac{7\pi}{8} \\ x_3 = \frac{11\pi}{8}, & x_4 = \frac{15\pi}{8} \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} x = 3\pi + n \cdot 4\pi \text{ eller} \\ x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 4\pi \text{ eller} \\ x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 4\pi \end{cases}$$



b) Maximipunkter: $\left(\frac{11\pi}{12}; 6\right)$ och $\left(\frac{23\pi}{12}; 6\right)$



b) Minimipunkt: $\left(\frac{5\pi}{3}; -3\right)$

50. a) Period: 3π
b) Maximipunkter: $\left(\frac{19\pi}{8}; 5\right)$ och $\left(\frac{43\pi}{8}; 5\right)$

51. Förskjutningen är $8\pi - 20 \approx 5,13$ rad. åt höger

52. $y = 0,5 \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$

53. $y = 0,5 \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$

54. $A = 1,5, B = 7,5$

55. $A = \sqrt{2}, B = 2\sqrt{2}$

56. a) $y = 4 + 2 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$

b) $4\frac{1}{3}\pi$ radianer

[Skriv här]

57. a) $\frac{2\pi}{3}$

b) $y = 1 + 4\cos 3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) Text $y = 70 + 20\sin \frac{\pi}{12}(x-1)$ som ger skärning då x är 3 eller 11 radianer.

58. a) Perioden = π

b) $y = -4 + 3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$

c) Text $y = -30 + 20\cos \frac{\pi}{12}(x+1)$ som ger skärning då $x = 7$

59. a) Perioden = $\frac{8\pi}{3}$

b) $y = 1 + 4\cos \frac{3}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) Text $y = -3 + 4\sin \frac{\pi}{6}(x+1)$, som ger skärning då vinklarna är 6 och 10 radianer.

60. Kl. 8–12 och kl. 20–24

61. a) Period: 12 h

b) Kl. 5–9 och kl. 17–21

62. Halsbandet syns kl. 4-8 och kl. 16-20. Knatte, Fnatte och Tjatte kommer att hitta halsbandet.

63. a) $u = 2$ rad

b) $A \approx 6,3 \text{ cm}^2$ (6,25)

c) ---