Mahifi.se

Extra uppgifter i talteori, bevis och induktionsbevis

1. Visa att $5^n + 3$ alltid delar 4 då n är ett positivt heltal.

2. Visa med indirekt bevis att $n^2 - 2$ är ett udda heltal om n är ett udda heltal

3. Visa att produkten $(2n + 1)(2n - 1)$ alltid kommer resultera i ett ojämnt tal för alla heltal på n

4. Visa att $27^n - 3^{2n}$ är delbar med 9 för alla heltal på $n \geq 1$

5. Visa att $n^3 + 2n$ alltid är delbar med tre

6. Visa att $49^n - 25^n$ är delbart med två

7. Visa med matematisk induktion att följande likhet stämmer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

8. Visa med indirekt bevis eller motsägelsebevis att om a är ett udda tal kommer uttrycket $a + a^2$ vara ett jämnt tal

9. Visa att $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} < \frac{7}{4}$ för alla n

10. Visa att $2^{16} - 1$ är delbart med femton

11. Visa att $a^n + b^n$ är delbar med $(a + b)$ om n är ett udda tal.*

12. Bestäm talet x i talbas 10 så likheten stämmer $x_{sju} + 41_{fem} = 100_{tio}$

13. Lös ekvationen om vi antar att antalet termer i summan går mot ∞

$$x \cdot 0{,}5^2 + x \cdot 0{,}5^4 + x \cdot 0{,}5^6 + x \cdot 0{,}5^8 \ldots = 400$$

14. Bestäm den sista siffran i talet $2^{32} + 3^{64}$

15. Visa att $2^{3n} - 1$ alltid är delbar med sju

16. Visa med induktionsbevis att följande likhet stämmer

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$$

17. Visa $x - 1$ att $x^n - 1$ alltid delar för alla n

18. Ni har lärt er regeln nedan under kursen. Visa att den stämmer med hjälp av induktionsbevis*

Aritmetisk summa $\quad s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$ där $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

19. Visa att $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ *

20. Joakim menar att summan

$$\sum_{n=4}^{k} n$$

aldrig kommer resultera i ett primtal. Undersök om han har rätt.

Lösningsförslag extra uppgifter i talteori och bevis

1. $4 | 5^n + 3$ Använd kongruens. $5^n + 3 \equiv 1^n + 3 = 4 \equiv 0 \mod 4$

2. Indirekt bevis: om n är ett jämnt tal är $n^2 - 2$ jämnt: $n = 2k$ $(2k)^2 - 2 = 4k^2 - 2 = \underbrace{2(2k-1)}_{\text{Jämnt}}$

Motsatsen bevisad

3. $(2n+1)(2n-1) = 4n^2 - 1$, $4n^2$ är alltid jämnt

Jämnt -1 = ojämnt

4. $9 | 27^n - 3^{2n}$ $27^n - (3^2)^n = 27^n - 9^n \equiv 0 \mod 9$

5. $3 | n^3 + 2n$ Induktionsbevis

① $n = 1$ $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ $3 | 3$

② Antagande: $n = k$ $k^3 + 2k = 3a$

③ Undersök $k+1$ $(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 2k + 3 = 3(k^2 + k + 1) + \underbrace{k^3 + 2k}_{\substack{= 3a \\ \text{Antagande}}} =$

$3(k^2 + k + 1) + 3a = 3(k^2 + k + 1 + a)$

$n^3 + 2n$ delar alltid 3

6. $49^n - 25^n \equiv 1^n - 1^n = 0 \mod 2$

7. Induktionsbevis

① $n=1$ $\quad \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ VL = HL

② Induktionsantagande $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$

③ undersök $n+1$ $\quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}}_{= 1 - \frac{1}{2^n} \text{ enligt antagande}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{2^{n+1} - 2 + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$$

VL = HL Bevisat! $\square$

8. Indirekt bevis: om a är jämnt kommer $a+a^2$ vara jämnt. $a=2k$ $\quad 2k+4k^2 = \underbrace{2(k+2k^2)}_{\text{jämnt}}$

Bevisat indirekt $\square$

9. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots\frac{1}{3^{n-1}} < \frac{7}{4}$

VL: Geometrisk summa: $a_n = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = a_1\frac{k^n-1}{k-1}$ $\quad a_1 = 1$ $\quad k=\frac{1}{3}$ $\qquad S_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{-\frac{2}{3}}$

försummas

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ Summan kommer aldrig

bli större än $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$ $\qquad \frac{6}{4}<\frac{7}{4}$

10. $15 \mid 2^{16}-1$

$2^{16}-1 = (2^4)^4-1 = 16^4-1$

$16^4-1 \equiv 1^4-1 \equiv 0 \mod 15$ ser bra ut!

11. Undersök modulo $(a+b)$

$$a^n + b^n \equiv (-b)^n + b^n \mod (a+b) \quad \text{Tänk } a - \underbrace{(a+b)}_{\text{moduloberäkningen}} = -b$$

om n är udda kommer

$(-b)^n$ bli negativt men b^n

vara positivt där kommer

$(-b)^n + b^n = 0$ om n är

udda därmed är

$a^n + b^n$ delbart med $a+b$

om n är udda.

12. $x_{sju} + 41_{fem} = 100_{tio}$ $\quad x_{sju} + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 7^0$

$x_{sju} + 21_{tio} = 202_{sju}$ $\quad x_{sju} + 30_{sju} = 202_{sju}$ $\quad x_{sju} = 202_{sju} - 30_{sju}$

$x_{sju} = 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 - 3 \cdot 7^1 - 0 \cdot 7 = 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 142_{sju}$

$1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 7^0 = 49 + 28 + 2 = 79_{tio}$

Svar: 79_{tio}

13. $x\cdot 0{,}5^2 + x\cdot 0{,}5^4 + x\cdot 0{,}5^6 + \dots = 400$

Geometrisk summa: $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$ $\quad a_1 = x\cdot 0{,}5^2 = \frac{x}{4}$

$k = 0{,}5^2 = \frac{1}{4}$

$400 = \frac{x}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{x}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{-\frac{3}{4}}$ $\quad S_n = 400$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{x}{4}\cdot\frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{x}{3}$

$\frac{x}{3} = 400 \quad x = 1200$

14. Sista siffran i $2^{32} + 3^{64}$ undersök mod 10 eftersom resten för mod 10 är sista siffran i talet

$2^{32}+3^{64} = (2^4)^8 + (3^4)^{16} = 16^8 + 81^{16} \equiv 6^8 + 1^{16} = 6^8 + 1 = (6^2)^4 + 1 =$

$= 36^4 + 1 \equiv 6^4 + 1 = (6^2)^2 + 1 = 36^2 + 1 \equiv 6^2 + 1 = 37 \equiv 7 \mod 10$

Svar: sista siffran är 7

15. $7 \mid 2^{3n}-1$ $\quad 2^{3n}-1 = (2^3)^n - 1 = 8^n - 1 \equiv 1^n - 1 = 0 \mod 7.$

16. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$

① $n=1$ $\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)=1+1$ $\quad VL=HL$

② Antagande: $n=k$ $\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)=k+1$

③ Undersök $n=k+1$ $\quad \underbrace{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{\substack{k+1 \\ \text{Antagande}}}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=k+1+1$

VL: $(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=k+\frac{k}{k+1}+1+\frac{1}{k+1}=k+1+\frac{k+1}{k+1}=k+2$

VL=HL Elegant!

17. $x-1 \mid x^n-1$ Metod 1: kongruensberäkning

$x^n \equiv 1^n \mod x-1$, argument: $x \equiv 1 \mod x-1$

$x^n-1 \equiv 1^n-1=0 \mod x-1$ vilket visar att det stämmer

Metod 2: Induktionsbevis

① $n=1$ $\quad x-1 \mid x-1$ Inget konstigt

(2) Antagande: $n=k$ $\quad x-1 \mid x^k-1 \quad x^k-1=a(x-1)$

(3) $x^{k+1}-1 = x \cdot x^k - 1 = x^k(x-1)+x^k-1 =$

$= x^k(x-1)+a(x-1) = (x-1)(x^k+a)$ Det delar

$(x-1$ Påståendet är bevisat!

18.

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \qquad S_n = n\cdot\frac{a_1 + a_n}{2} = n\cdot\frac{a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d}{2}$

$= n\cdot\frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}$

① $n=1 \qquad a_1 = a_1 + (1-1)\cdot d = a_1 \qquad S_1 = 1\cdot\frac{a_1\cdot a_1}{2} = a_1$ VL=HL

② $n=p \qquad \sum_{k=1}^{p} a_1 + (k-1)\cdot d = p\cdot\frac{2a_1 + (p-1)\cdot d}{2}$

③ Undersök $n=p+1$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p}(a_1 + (k-1)\cdot d)}_{p\cdot\frac{2a_1 + (p-1)\cdot d}{2}} + a_1 + p\cdot d = (p+1)\cdot\frac{2a_1 + p\cdot d}{2}$$

$$\frac{2\cdot a_1\cdot p + p^2\cdot d - p\cdot d}{2} + a_1 + p\cdot d = \frac{2a_1\cdot p + p^2\cdot d + 2a_1 + p\cdot d}{2}$$

$$\frac{2a_1\cdot p + p^2\cdot d - p\cdot d + 2a_1 + 2p\cdot d}{2} = \frac{2a_1\cdot p + p^2\cdot d + 2a_1 + p\cdot d}{2}$$

$$\frac{2a_1\cdot p + p^2\cdot d + 2a_1 + p\cdot d}{2} = \frac{2a_1\cdot p + p^2\cdot d + 2a_1 + p\cdot d}{2}$$ VL=HL

□ Tung!

19. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$ Induktionsbevis

(1) $n=1$ $\quad 1 \leq 2-\frac{1}{1}=1$ VL=HL

(2) Induktionsantagande: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

(3) Undersök $n+1$

$$\underbrace{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{\leq 2-\frac{1}{n}}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n+1}$$

$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n+1}$ Visa $-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+1}$

Skriv på gemensamt bråkstreck

$VL=-\frac{(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}+\frac{n}{n(n+1)^2}$ $\qquad HL=\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}$

$=\frac{-n^2-2n-1+n}{n(n+1)^2}=\frac{-n^2+n-1}{n(n+1)^2}$ $\qquad \frac{-n^2+n-1}{n(n+1)^2}<\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}$ då $n=1,2,3\ldots$

Påståendet bevisat!

20. $\sum_{n=4}^{k} n$ $\quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 4 + 4 + (k-4)$

$S_n = (k-3)\cdot \frac{4+4+(k-4)}{2} = (k-3)\cdot\frac{(k+4)}{2} =$

$= \frac{(k-3)(k+4)}{2}$ om k är jämnt $k=2p$ blir

$(k+4)$ jämnt inte primtal!

om k är ojämnt $k=2p+1$ blir

$(k-3)$ jämnt, inte primtal!

Då är det visat!