949. $y' = 17y \Rightarrow y' - 17y = 0$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{17x}$, där C är en godtycklig konstant.

Svar: $y = C \cdot e^{17x}$

950. $y' = 0{,}35y$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{0{,}35x}$, där C är en godtycklig konstant.

$y(0) = C \cdot e^{0{,}35 \cdot 0} = 3 \Rightarrow C = 3$
$y = 3 \cdot e^{0{,}35x}$

Svar: $y = 3 \cdot e^{0{,}35x}$

951. $y' = 0{,}015y$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{0{,}015x}$, där C är en godtycklig konstant.

$y(0) = C \cdot e^{0} = 2 \Rightarrow C = 2$
$y = 2 \cdot e^{0{,}015x}$

Svar: $y = 2 \cdot e^{0{,}015x}$

952. $y \cdot y' + x = 0$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$A: y'(3) = -\frac{3}{4}$$

$$B: y'(1) = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$C: y'(3) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Svar: $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ respektive $-\frac{1}{3}$

953. $3y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3} \cdot y$

$y'(3) = -\frac{2}{3} \cdot 9 = -6$ ($x = 3$ och $y = 9$)

Enpunktsformen för räta linjens ekvation ger

$y - 9 = -6 \cdot (x - 3)$
$y = -6x + 27$

Svar: $y = -6x + 27$

954. $y' = -0{,}024 \cdot (y - 20)$
$y' + 0{,}024 \cdot y = 0{,}48$

Detta är en inhomogen differentialekvation av första ordningen. Vi söker först den allmänna lösningen y_0 till den homogena ekvationen $y' + 0{,}024 \cdot y = 0$.

Denna allmänna lösning är $y_0 = C_1 \cdot e^{-0{,}024t}$.

Vi söker en partikulärlösning y_p till den inhomogena ekvationen $y' + 0{,}024 \cdot y = 0{,}48$. Eftersom höger led är en konstant ansätter vi en konstant $y_p = a \Rightarrow y_p' = 0$.

Insättning ger $0 + 0{,}024a = 0{,}48 \Rightarrow a = \frac{0{,}48}{0{,}024} = 20$

$y_p = 20$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är $y = y_p + y_0 = 20 + C_1 \cdot e^{-0{,}024t}$.

$y(5) = 20 + C_1 \cdot e^{-0{,}024 \cdot 5} = 20 + C_1 \cdot e^{-0{,}12} = 85$

$C_1 \cdot e^{-0{,}12} = 65 \Rightarrow C_1 = 65 \cdot e^{0{,}12}$

$y = 20 + 65 \cdot e^{0{,}12} \cdot e^{-0{,}024t} = 20 + 65 \cdot e^{0{,}12 - 0{,}024t}$

$y(22) = 20 + 65 \cdot e^{0{,}12 - 0{,}024 \cdot 22} \approx 63{,}2$ °C

Svar: 63 °C

955. $y' = -3y$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{-3x}$, där C är en godtycklig konstant.

$y(2) = C \cdot e^{-3 \cdot 2} = 3$
$C = 3 \cdot e^{6}$
$y = 3 \cdot e^{6} \cdot e^{-3x} = 3 \cdot e^{6 - 3x}$

Svar: $y = 3 \cdot e^{6 - 3x}$

956. $y' + y = 0$ är en homogen differentialekvation av första ordningen. Den har den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{-x}$, där C är en godtycklig konstant. Att lösningskurvan skall gå genom punkten (0, 3) innebär att $y(0) = 3$.

$y(0) = C \cdot e^{-0} = 3 \Rightarrow C = 3$

Då får vi funktionen $y = 3 \cdot e^{-x}$.

▸ **Svar:** Allmän lösning är $y = C \cdot e^{-x}$. Den lösningskurva som går genom (0, 3) har ekvationen $y = 3 \cdot e^{-x}$.

957. $y' - 2y = 0$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{2x}$, där C är en godtycklig konstant.

Sätt $y(2) = 3$.
$y(2) = C \cdot e^{2 \cdot 2} = 3 \Rightarrow C = 3 \cdot e^{-4}$
$y = 3 \cdot e^{-4} \cdot e^{2x} = 3 \cdot e^{2x-4}$

▸ **Svar:** $y = 3 \cdot e^{2x-4}$

958. $m' = -0{,}231m$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $m = C \cdot e^{-0{,}231t}$, där C är en godtycklig konstant.

Sätt $m(2) = 23$.

$m(2) = C \cdot e^{-0{,}231 \cdot 2} = 23$
$C = 23 \cdot e^{0{,}231 \cdot 2} \approx 36{,}5 \text{ mg} = m(0)$

$m(t) = 36{,}5 \cdot e^{-0{,}231 \cdot t}$

Sätt $36{,}5 \cdot e^{-0{,}231 \cdot t} = \dfrac{36{,}5}{2} = 18{,}25$

$e^{-0{,}231t} = 0{,}5 \Rightarrow -0{,}231 \cdot t = \ln 0{,}5$

$t \approx 3{,}0$ h

▸ **Svar:** $m(0) = 37$ mg och halveringstiden är 3,0 h.

959. a) Tiden t år räknas från år 1980. Om halten dioxin betecknas med y får vi ekvationen $y' = -0{,}015y$.

▸ **Svar:** $y' = -0{,}015y$

b) Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{-0{,}015t}$, där C är en godtycklig konstant.

$y = 0{,}5 \cdot C$ ger $e^{-0{,}015t} = 0{,}5$
$-0{,}015t = \ln 0{,}5 \Rightarrow t \approx 46$

$1980 + 46 = 2026$

▸ **Svar:** ungefär år 2026

960. Antag att t är tiden i dygn efter den 1:e oktober.

$$\frac{dT}{dt} = -kT$$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $T = C \cdot e^{-kx}$, där C är en godtycklig konstant.

$T(0) = C \cdot e^0 = 66 \Rightarrow C = 66$
$T(t) = 66 \cdot e^{-kt}$

Den 1:a december är $t = 61$.
$T(61) = 66 \cdot e^{-k \cdot 61} = 48$

$$-k \cdot 61 = \ln\frac{48}{66} \Rightarrow k = -\frac{\ln\frac{48}{66}}{61} \approx 0{,}00522$$

$T(t) = 66 \cdot e^{-0{,}00522 \cdot t}$

Sätt $T(t) = 30$
$66 \cdot e^{-0{,}00522 \cdot t} = 30$

$$-0{,}00522 \cdot t = \ln\frac{30}{66} \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{30}{66}}{0{,}00522} \approx 151$$

151 dagar efter den 1:e oktober är 28 februari.
Vattenvärmen räcker t.o.m. den 28 februari.

▸ **Svar:** Vattenvärmen räcker t.o.m. den 28 februari.

961. $3y + y' = 0$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $y = C \cdot e^{-3x}$, där C är en godtycklig konstant.

$y(0) = C \cdot e^{-3 \cdot 0} = 5 \Rightarrow C = 5$
$y = 5 \cdot e^{-3x}$

$y(6) = 5 \cdot e^{-3 \cdot 6} = 5 \cdot e^{-18} \approx 7{,}61 \cdot 10^{-8}$

▸ **Svar:** $y(6) = 5 \cdot e^{-18} \approx 7{,}61 \cdot 10^{-8}$

962. $\dfrac{dI}{dx} = -k \cdot I$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $I = C \cdot e^{-kx}$, där C är en godtycklig konstant.

$I(3{,}0) = C \cdot e^{-k \cdot 3{,}0} = 0{,}84 \cdot C$
$-3k = \ln 0{,}84 \Rightarrow k = 0{,}0581 \text{ cm}^{-1}$

Om 75% stoppas så återstår 25%.

Sätt $I(x) = 0{,}25 \cdot C$.
$I(x) = C \cdot e^{-0{,}0581x} = 0{,}25 \cdot C$
$-0{,}0581x = \ln 0{,}25 \Rightarrow x = 23{,}86$ cm

▸ **Svar:** $k = 0{,}0581 \text{ cm}^{-1}$. Om ämnets tjocklek är 24 cm, så stoppas 75% av strålningen.

963. $\dfrac{dM}{dt} = -0{,}051 \cdot M$

Detta är en homogen differentialekvation av första ordningen med den allmänna lösningen $M = C \cdot e^{-0{,}051t}$, där C är en godtycklig konstant.

a) 1999 – 1982 = 17 år
$M(17) = 200 \cdot e^{-0{,}051 \cdot 17} \approx 84$ miljoner kg

▸ **Svar:** 84 miljoner kg

b) Sätt $M(t) = 200 \cdot e^{-0{,}051t} = 50$.
$e^{-0{,}051t} = 0{,}25$
$-0{,}051 \cdot t = \ln 0{,}25 \Rightarrow t \approx 27$ år
1982 + 27 = 2009 finns 50 miljoner kg lekmogen torsk enligt denna modell.

▸ **Svar:** år 2009

964. $x \cdot y' - x = 1 \Rightarrow x \cdot (y' - 1) = 1$

$$y' - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + 1$$

Den sökta funktionen y är en primitiv funktion till $\dfrac{1}{x} + 1$.

$y = \ln x + x + C$

$y(1) = 2 \Rightarrow \ln 1 + 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$

▸ **Svar:** $y = \ln x + x + 1$

965. $y' + 3y = e^{4x}$

Lösningen till den homogena differentialekvationen $y' + 3y = 0$ är $y_0 = C \cdot e^{-3x}$.

En partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen är $y_p = D \cdot e^{4x}$.

$y'_p = 4 \cdot D \cdot e^{4x}$

Insättning ger $4 \cdot D \cdot e^{4x} + 3 \cdot D \cdot e^{4x} = e^{4x}$

$$D = \frac{1}{7} \Rightarrow y_p = \frac{e^{4x}}{7}$$

Den allmänna lösningen är

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-3x} + \frac{e^{4x}}{7}$$

Sätt $y(0) = 6$.

$$y(0) = C \cdot e^{-3 \cdot 0} + \frac{e^{4 \cdot 0}}{7} = 6$$

$$C = 6 - \frac{1}{7} = \frac{41}{7} \Rightarrow y = \frac{41 e^{-3x} + e^{4x}}{7}$$

▸ **Svar:** $y = \dfrac{41 e^{-3x} + e^{4x}}{7}$

966. $y = C \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot (\sin x + 1) = C \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot \sin x - 2$

Derivering ger $y' = C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot \cos x$.

y' och y sätts in i differentialekvationens vänsterled.

$y' - y \cdot \cos x =$
$= C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot \cos x - (C \cdot e^{\sin x} -$
$- 2 \cdot \sin x - 2) \cdot \cos x =$
$= C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot \cos x - C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} +$
$+ 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x =$
$= \sin 2x =$ högerledet

$y = C \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot (\sin x + 1)$ är således en lösning till differentialekvationen $y' - y \cdot \cos x = \sin 2x$, vilket skulle visas.

967. $\dfrac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_0) \Rightarrow \dfrac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot T_0$

Detta är en inhomogen differentialekvation av första ordningen.

Den homogena ekvationen $\dfrac{dT}{dt} + k \cdot T = 0$ har den allmänna lösningen $T(t) = A \cdot e^{-kt}$.

Vi ser omedelbart att $T = T_0$ är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen.

Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är $T(t) = A \cdot e^{-kt} + T_0$.

Vi har att $T(0) = 20$ och $T_0 = 220$.

Insättning ger $T(0) = A \cdot e^{-k \cdot 0} + 220 = 20$, vilket ger att $A = -200$.

Insättning av $T(0,5) = 36$ ger
$T(0,5) = -200 \cdot e^{-k \cdot 0,5} + 220 = 36$
$e^{-k \cdot 0,5} = 0,92$
$-0,5 \cdot k = \ln 0,92$
$k = -2 \cdot \ln 0,92$
$T(t) = -200 \cdot e^{2 \cdot \ln 0,92 \cdot t} + 220$

Sätt $-200 \cdot e^{2 \cdot \ln 0,92 \cdot t} + 220 = 69$.

$e^{2 \cdot \ln 0,92 \cdot t} = 0,755$
$2 \cdot \ln 0,92 \cdot t = \ln 0,755$
$t \approx 1,685$ h $\approx$ 1 h 40 minuter

▸ **Svar:** Efter ca 1 h 40 minuter

968. a) $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = g$

Med givna värden på konstanterna

$$\frac{dv}{dt} + \frac{140}{100} \cdot v = 9,8 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + 1,4\,v = 9,8$$

Detta är en första ordningens inhomogen differentialekvation.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $\frac{dv}{dt} + 1,4\,v = 0$ är $v_h = C \cdot e^{-1,4 \cdot t}$.

Eftersom höger led är en konstant ansätter vi partikulärlösningen $v_p = D \Rightarrow v_p' = 0$.

Insättning i den inhomogena ekvationen ger
$0 + 1,4 \cdot D = 9,8 \Rightarrow D = 7$

Den allmänna lösningen är
$v = v_h + v_p = C \cdot e^{-1,4t} + 7$.

Sätt $v(0) = 0$.
$v(0) = C \cdot e^{-1,4 \cdot 0} + 7 = 0 \Rightarrow C = -7$
$v(t) = -7 \cdot e^{-1,4t} + 7$

▸ **Svar:** $v(t) = -7 \cdot e^{-1,4t} + 7$

b) Eftersom $\lim_{t \to \infty} \left(-7 \cdot e^{-1,4t}\right) = 0$ får vi att

$$\lim_{t \to \infty} (-7 \cdot e^{-1,4t} + 7) = 7,0$$

▸ **Svar:** v går mot gränsfarten 7,0 m/s.

969. $R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{U}{R}$

Detta är en första ordningens inhomogen differentialekvation.

Den homogena ekvationen $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$

har lösningen $q_0 = k \cdot e^{-t/RC}$, där k är en godtycklig konstant.

Vi söker en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen och ansätter en konstant sådan att

$$q_p = a \Rightarrow \frac{dq_p}{dt} = 0.$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$0 + \frac{a}{RC} = \frac{U}{R} \Rightarrow a = C \cdot U.$$

Således är $q_p = C \cdot U$ en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är $q = q_0 + q_p = k \cdot e^{-t/RC} + C \cdot U$.

Eftersom $q = 0$ vid tiden $t = 0$ får vi
$0 = k \cdot 1 + C \cdot U \Rightarrow k = -C \cdot U$.

Detta ger att
$q = C \cdot U - C \cdot U \cdot e^{-t/RC} = C \cdot U \cdot (1 - e^{-t/RC})$.

Med värden insatta får vi $q = 0,0012 \cdot (1 - e^{-t/0,02})$.

Maximala värdet på q (= 0,0012) uppnås efter lång tid. Vid vilken tidpunkt t uppgår laddningen till 50% av detta värde, dvs. till 0,0006?

Sätt $0,0006 = 0,0012 \cdot (1 - e^{-t/0,02})$.

$1 - e^{-t/0,02} = 0,50$
$e^{-t/0,02} = 0,50 \Rightarrow -t/0,02 = \ln 0,50$
$t = -0,02 \cdot \ln 0,50 \approx 0,014$ s = 14 ms

▸ **Svar:** Laddningen når halva maximala värdet efter 14 ms.

970. $y' + 3y = 9x^2 - 6x - 4$

Lösningen till den homogena ekvationen $y' + 3y = 0$ är $y_0 = C \cdot e^{-3x}$.

Eftersom höger led är ett andragradsuttryck ansätts en partikulärlösning av samma typ.

$y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_p = 2ax + b$

Insättning i differentialekvationen ger
$2ax + b + 3 \cdot (ax^2 + bx + c) = 9x^2 - 6x - 4$
$3ax^2 + (2a + 3b) \cdot x + (b + 3c) = 9x^2 - 6x - 4$

Identifiering av koefficienterna ger
$3a = 9 \;\Rightarrow\; a = 3$
$2a + 3b = -6 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 3 + 3b = -6 \;\Rightarrow\; b = -4$
$b + 3c = -4 \;\Rightarrow\; -4 + 3c = -4 \;\Rightarrow\; c = 0$

Således är $y_p = 3x^2 - 4x$ en partikulärlösning.

Allmänna lösningen till differentialekvationen är
$y = y_o + y_p = C \cdot e^{-3x} + 3x^2 - 4x$.

Sätt $y(0) = 25$.

$C \cdot e^{-3 \cdot 0} + 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 = 25 \;\Rightarrow\; C = 25$
$y = 25 \cdot e^{-3x} + 3x^2 - 4x$

▸ **Svar:** $y = 25 \cdot e^{-3x} + 3x^2 - 4x$

971. $m \cdot \dfrac{dv}{dt} = mg - kv$ ger med kända data

$10 \cdot v' = 10 \cdot 9{,}8 - 2{,}0 \cdot v$
$v' + 0{,}2 \cdot v = 9{,}8$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}2t}$.

En partikulärlösning till den inhomogena ekvationen är $v_p = D \;\Rightarrow\; v_p' = 0$.

Insättning i $v' + 0{,}2 \cdot v = 9{,}8$ ger
$0 + 0{,}2 \cdot D = 9{,}8 \;\Rightarrow\; D = v_p = 49$.

$v(t) = v_h + v_p = C \cdot e^{-0{,}2t} + 49$
$v(0) = C \cdot e^{-0{,}2 \cdot 0} + 49 = 0 \;\Rightarrow\; C = -49$
$v(t) = -49 \cdot e^{-0{,}2t} + 49$

$$s = \int_0^{10} (-49 \cdot e^{-0{,}2t} + 49)\,dt = \left[\frac{49 \cdot e^{-0{,}2t}}{0{,}2} + 49t\right]_0^{10} =$$

$$= \left(245 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 10} + 49 \cdot 10\right) - \left(245 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 0} + 49 \cdot 0\right) \approx$$

≈ 278

▸ **Svar:** 280 m

972. $y' + y = \sin x + \cos x$

Lösningen till den homogena ekvationen $y' + y = 0$ är $y_o = C \cdot e^{-x}$.

Eftersom höger led är en summa av trigonometriska uttryck ansätter vi en partikulärlösning av samma typ.

$y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$
$y_p' = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x$

Insättning i differentialekvationen ger

$A \cdot \cos x - B \cdot \sin x + A \cdot \sin x + B \cdot \cos x =$
$= \sin x + \cos x$

$(A + B) \cdot \cos x + (A - B) \cdot \sin x = \sin x + \cos x$

Identifiering av koefficienterna ger
$A + B = 1$
$A - B = 1$

Ledvis addition ger $2A = 2 \;\Rightarrow\; A = 1$.

$A + B = 1 \;\Rightarrow\; B = 0$

Således är $y_p = \sin x$ en partikulärlösning.
$y = y_o + y_p = C \cdot e^{-x} + \sin x$

Sätt $y(0) = 5$.
$C \cdot e^{-0} + \sin 0 = 5 \;\Rightarrow\; C = 5$
$y = 5 \cdot e^{-x} + \sin x$

▸ **Svar:** $y = 5 \cdot e^{-x} + \sin x$

973. $y'' + 9y = 0$

Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 9 = 0$ med de icke-reella rötterna $r = \pm 3i$.

Den allmänna lösningen är då
$y = C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x$.

▸ **Svar:** $y = C_1 \cdot \sin 3x + C_1 \cdot \cos 3x$

974. $y = 3x^2 + 6x$
$y' = 6x + 6$ och $y'' = 6$

Insättning ger
$y'' + y' - y = 6 + 6x + 6 - 3x^2 - 6x = 12 - 3x^2$
vilket skulle visas.

975. $3y'' - 6y' + 15y = 0$

Karakteristiska ekvationen är
$3r^2 - 6r + 15 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 2r + 5 = 0$