Lektion 9

Exponentiella modeller

Kaffe i termos (forts.)

Efter frukosten häller Jennifer och Leo kaffet i en termos för att ta en höstpick-nick. Då var kaffets temperatur 93° Celsius. Leo menar att **kaffet kommer att svalna med $25\,\%$ per timme**. När har temperaturen sjunkit till 40°C ? Ställ upp en funktion, rita dess graf och avläs svaret från grafen.

Matematisk modellering

Vi inför samma beteckningar som i **Lektion 8**:

$$x \;=\; \text{Tiden i timmar efter kaffet hälldes i termosen}$$

$$y \;=\; \text{Kaffets temperatur i }^\circ\text{ Celsius}$$

Sedan översätter vi Leos påstående (**röd**markerat i uppgiften ovan) till matematik:

Efter 1 timme är kaffets temperatur $y = 93 \cdot 0{,}75 = 93 \cdot 0{,}75^{1}$

Efter 2 timmar är kaffets temperatur $y = 93 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 93 \cdot 0{,}75^{2}$

Efter 3 timmar är kaffets temperatur $y = 93 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 93 \cdot 0{,}75^{3}$

Efter x timmar får vi $\quad \ldots \quad \ldots$

Modellen: $\boxed{y \;=\; 93 \cdot 0{,}75^{x}}$

Denna modell är *exponentiell* därför att x finns i *exponenten*. Funktionen kallas för *exponentialfunktion*. Förändringsfaktorn som motsvarar $25\,\%$ minskning är: $1 - 0{,}25 = 0{,}75$

Precis som i den linjära modellen bekräftas även här uppgiftens information om att kaffets temperatur i början var 93°C, algebraiskt av modellen: För tiden $x = 0$ blir temperaturen: $y = 93 \cdot 0{,}75^{0} = 93 \cdot 1 = 93$

Till skillnad från den linjära modellen i **Lektion 8** förväntas grafen till denna funktion inte bli en rät linje utan en exponentialkurva som pga $0{,}75 < 1$ är avtagande. Vi ritar nu grafen:

Öppna Pythons IDLE. Välj i kommandofönstret (Shell) menyn **File → New File**

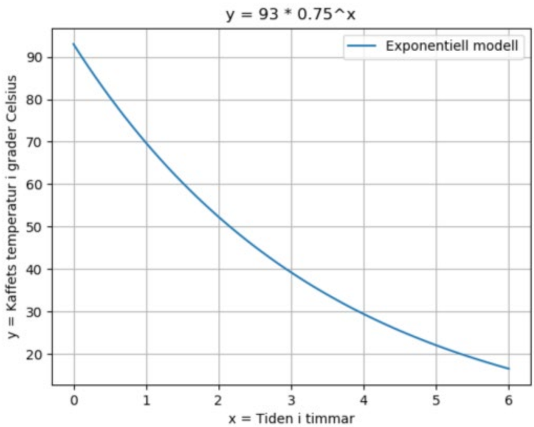
Skriv i IDLEs editfönster (Untitled) följande kod (utan radnumren):

Kaffe_Exp

```python
# Kaffe_Exp.py
# Ritar grafen till Leos exponentiella modell y = 93 * 0.75^x

import matplotlib.pyplot as plt          # Importerar modulen pyplot
                                         # från matplotlib
def f(x) :                               # Definierar funktionen
    return 93 * 0.75**x                  # y = f(x) = 93 * 0.75^x

x = 0                                    # Första x-värde
xEND = 6                                 # Sista x-värde
while x < xEND :                         # Loop från x = 0 till x < 6
   plt.plot(x, f(x), '.-b')              # Ritar grafen till y=f(x)
   x = x + 0.01                          # Uppdaterar x med steget 0.01

plt.grid()                               # Ritar rutnät
plt.title('y = 93 * 0.75^x')             # Skriver rubrik
plt.xlabel('x = Tiden i timmar')         # Skriver text till x-axeln
plt.ylabel('y = Kaffets temperatur i grader Celsius')     # y-axeln
plt.legend(['Exponentiell modell'])      # Sätter en textruta (Legend)
plt.show()                               # Visar grafen på skärmen
```

Om du i **Lektion 8** har installerat *matplotlib* kan du köra programmet ovan i Python och få grafen till höger.

Annars gör det enligt **Lektion 8** eller instruktionerna i appendix **B** på sid 103. Sedan kan du exekvera som vanligt:



Välj i IDLE:s editfönster **File → Save As…**, välj en plats på din dator, ange filnamnet Kaffe_Exp.py och klicka på **Spara**. Välj **Run → Run Module**.

Du borde få grafen ovan som visar förloppet till funktionen $y = 93 \cdot 0,75^{x}$, en *exponentiell modell* för kaffets avsvalnande, en kurva som visar ett exponentiellt avtagande av temperaturen. Följer man den horisontella linjen i grafens rutnät från y-värdet 40 kan man även avläsa från grafen:

Kaffet är inte längre drickbart (40° C) efter ca. 2 timmar och 50 minuter.

Kodförklaring

`Kaffe_Exp`

`Rad 4`	Se ***Kodförklaring*** sid 43, `rad 5`.
`Rad 6-7`	Se ***Kodförklaring*** sid 43, `rad 7-8`.
`Rad 11-13`	En `while`-loop (sid 31) som ritar kurvans punkter och uppdaterar `x`-värdena med steget `0.01` från `0` till `6`.
`Rad 12`	Här anropas funktionen `f(x)` som definierats i raderna `6-7` och läggs in i `plot()`-satsen.
`Rad 13`	`x`-värdena ökas i varje varv av loopen med steget `0.01` som valts godtyckligt litet för att sätta ihop punkterna i kurvan, när den plottas.

Frågor

1. Vilken temperatur har kaffet efter 3 timmar enligt den exponentiella modellen? Läs av från grafen på sid 46. Kontrollera din avläsning algebraiskt.
2. I den linjära modellen kunde kaffets temperatur bli 0˚ C, se lösningen till fråga 3 i **Lektion 8**, sid 82. Kan enligt den exponentiella modellen temperaturen sjunka till 0˚ C? Om ja, efter hur lång tid? Om nej, varför inte?
3. Läs av från grafen på sid 46 hur lång tid det tar tills temperaturen sjunker till 53˚ C då kaffet inte längre anses vara drickbart?
4. Varför behövs i programmet `Kaffe_Exp` (sid 46) en `while`-loop för att rita grafen till exponentialfunktionen, medan den inte behövdes hos grafen till den räta linjen (sid 42)?
5. I programmet `Kaffe_Lin` (sid 42) hade värdetabellen 7 punkter och vi kunde i övn **1802** se att man kunde minska antalet ytterligare. Finns det i programmet `Kaffe_Exp` (sid 46) en värdetabell? Om ja, hur många punkter har den?

Övningar

1901

Skriv ett program som visar att exponentialfunktionen $y = f(x) = 93 \cdot 0,75^x$ är positiv och inte blir 0 eller negativ för alla **x** mellan t.ex. -2400 och 2400. Sätt en logisk variabel `pos` till `True` i början, beräkna i en loop `f(x)` (med `x`-steget 1) och sätt `pos` till `False` om `f(x) ≤ 0`. Skriv ut efter loopen ett lämpligt meddelande. Jämför resultatet med ditt svar på fråga 2.

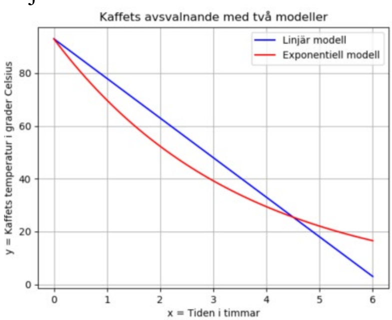
1902

a) Visa med den exponentiella modellen (sid 45) att kurvans ändpunkter i grafen på sid 46 har koordinaterna (0; 93) och (6; 16,55).

b) Beräkna lutningen till den räta linje som kan tänkas genom kurvans ändpunkter – en slags *genomsnittlig lutning* av den exponentiella kurvan i hela intervallet. Jämför den med den linjära modellens lutning. Vilka slutsatser kan man dra?

1903

För att fullt kunna jämföra de båda modellerna med varandra, rita i ett pythonprogram graferna till båda modeller i ett och samma koordinatsystem så att du får följande bild:



Svara med hjälp av graferna:

a) Vid vilken tidpunkt ungefär har kaffet samma temperatur i båda modellerna?

b) Enligt vilken modell uppnår kaffet *tidigare* temperaturen 53 ° C då det inte längre är drickbart? För att besvara frågan precisare rita i samma koordinatsystem en rät linje till.

1904

Sur mjölk: Bakterier i mjölk föröker sig enligt modellen: $y = C \cdot a^x$

där C är en konstant och a = 1,3095875. I början fanns i 1 liter mjölk 150 bakterier.

a) Bestäm konstanten C.

b) Efter 9 timmar och 37 min har mjölken blivit sur. Hur många bakterier fanns då i mjölken?

c) Rita med Python grafen till modellen och avläs tiden då det fanns hälften så många bakterier som i b) genom att rita till en rät linje. Blir tiden också halverad? Varför inte? Markera även surhetsmängden i grafen.

1905

Ekonomi: Charlotte vill placera ett startkapital på 5 000 kr på ett investmentkonto med en räntesats på 7% per år.

a) Ställ upp en modell för kapitalets tillväxt.

b) Charlotte vill veta: Efter hur många år och månader har startkapitalet fördubblats? Rita grafer i Python för att avläsa svaret.

c) Kan Charlotte förkorta väntetiden genom att utöka startkapitalet?