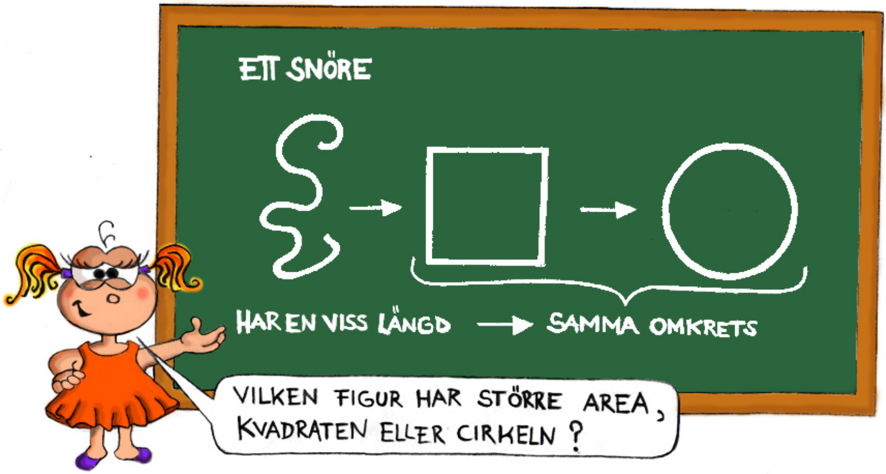
Utdrag ur boken *"Programmering i matematik – Tio lektioner"* (under bearbetning)

Lektion 3

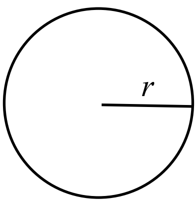
Problemlösning

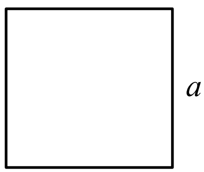


Matematisk förberedelse

Cirkel-kvadrat problemet

Vi betecknar cirkelns radie med r och kvadratens sida med a:





Cirkelns omkrets: $O_{cirkel} = 2\pi r$ Kvadratens omkrets: $O_{kvadrat} = 4a$

Båda figurernas omkrets ska vara lika stor, vilket innebär:

$$O_{kvadrat} = O_{cirkel}$$

$$4a = 2\pi r$$

Samband mellan r och a :

$$a = \frac{2\pi r}{4}$$

$$\boxed{a = \frac{\pi r}{2}}$$

`Sambandet` ovan gäller om och endast om cirkeln och kvadraten har samma omkrets. Vi tar över den till den digitala lösningen, se `blå`markerad kod nedan (tredje kodraden):

Digital lösning

`Circle_Square_1`

```
Öppna Python, mata in följande och tryck på Enter efter varje rad:
>>> from math import pi
>>> r = 4
>>> a = pi * r / 2                # Samband mellan r och a
>>> A_circle = pi * r**2
>>> A_square = a**2
>>> print('Cirkelns area är', A_circle)
Cirkelns area är 50.26548245743669
>>> print('Kvadratens area är', A_square)
Kvadratens area är 39.47841760435743
>>> if A_circle > A_square :
>>>    print('Cirkeln är störst.')
Cirkeln är störst.
```

Beräkningarna ovan visar att cirkeln med radien `r = 4` har en större area än kvadraten när de har samma omkrets.

Men hur blir det om man väljer andra värden för radien än `r = 4`? Frågan kan inte besvaras nu, eftersom `r = 4` är hårdkodat i koden ovan. För att besvara frågan måste vi antingen upprepa all kod ovan och ge `r` ett annat värde eller: vi *generaliserar* koden genom att *läsa in* ett värde för `r`. I nästa lektion ska vi lära oss att läsa in data till Python. Dessutom kommer vi att skriva och spara koden i en fil för att kunna köra om den och läsa in olika värden på `r`.

Kodförklaring

`Circle_Square_1`

Första raden	`from math import pi` importerar konstanten π från modulen `math` till vår session så att vi kan komma åt den sedan. Konstanten `pi` är lagrad i modulen `math`. En modul är en samling fördefinierade koder i Python.
Rad 3	Texten efter tecknet `#` är en *kommentar* i Python.
Raderna 6 & 8	`print()` skriver ut text och en variabel. Kommat skiljer åt texten från variabeln. Texten omges i koden av apostrofer `' '`. Variablerna `A_circle` och `A_square` däremot står i `print()` med sitt namn utan apostrofer och skilda från text med komma. De har redan definierats.

Enkelt val: `if`-satsen

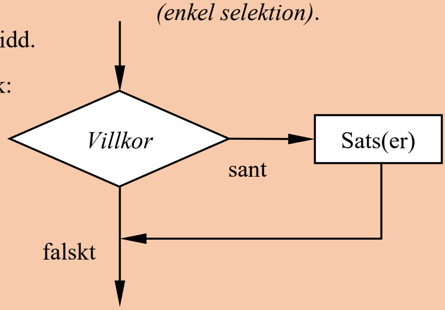
Raderna 10 & 11

```
if villkor :
    Sats(er)
```

Om villkoret är sant utförs en eller flera satser. Är villkoret falskt, görs ingenting: ett enkelt *val* utan alternativ *(enkel selektion)*.

Indragning(ar) avgör satsernas räckvidd.

Flödesschemat visar **if**-satsens logik:



Frågor

1. Kör koden **Circle_Square_1** (sid 2) utan den första raden `from math import pi`. Tolka Pythons felmeddelande.
2. Varför definieras i koden **Circle_Square_1** kvadratens sida `a` till uttrycket `pi * r / 2` medan cirkelns radie `r` sätts godtyckligt till `4`?
3. Vilket resultat får man om man kör **Circle_Square_1** med andra värden på `r` än `4`? Testa med några i Python. Tror du att resultatet är oberoende av `r`-värdena?
4. Varför blir det fel om man i den första `print`-satsen utelämnar kommat i parentesen?
5. Sätt i `print`-satserna `A_circle` och `A_square` inom apostrofer, utelämna kommat o. kör.
6. Varför står i `print`-satserna apostrofer kring den första, men inte kring den andra parametern? *Parametrar* är delar i `print()`-satsens parentes som är åtskilda med komma.

Varför är såpbubblor runda?

Eftersom de följer naturens lag och antar den minst möjliga ytan vid samma volym. Detta kan endast uppnås av *klotet*, en geometrisk figur som saknar hörn. Dessutom är den vacker.

Naturen minimerar energin. Effektiviteten möter estetiken.

Genom att kombinera programmering (beräkning) med matematik (bevis) kan du lyfta hemligheterna bakom naturlagen som gör såpbubblorna runda. Här lärde vi oss att cirkeln har större area än kvadraten, om de hade samma omkrets.

I **övn 1403** nedan ställs den omvända frågan, *det duala problemet*: Vilken av dem har den *minsta omkretsen*, om de har *samma area*? Kommer svaret fortvarande vara *cirkeln?*

Övningar

1304 Lös ***Cirkel-kvadrat***-problemet matematiskt: Ställ upp ett algebraiskt uttryck för förhållandet mellan figurernas areor, t.ex.: $A_{cirkel} \, / \, A_{kvadrat}$

a) Ange kvoten *exakt* dvs bibehåll π som bokstav både under uträkningen och i resultatet. Använd bråk istället för decimaltal.

b) Vilken generell slutsats kan man dra av resultatet? Är slutsatsen beroende av fig.storlek?

c) Ange svaret i hela procent. Jämför resultatet med Pythons svar i förra övningen.

Lösning:

a) Samband mellan r och a : $a = \dfrac{\pi r}{2}$ (sid 1)

Cirkelns area: $A_{\text{cirkel}} = \pi r^2$

Kvadratens area: $A_{\text{kvadrat}} = a^2 = \left(\dfrac{\pi r}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi^2 r^2}{4}$

$A_{\text{cirkel}} \, / \, A_{\text{kvadrat}} =$

$$= \pi r^2 \Big/ \frac{\pi^2 r^2}{4} = \pi r^2 \cdot \frac{4}{\pi^2 r^2} = \frac{4 \pi r^2}{\pi^2 r^2} = \frac{4 \pi}{\pi^2} = \frac{4}{\pi}$$

b) Förhållandet mellan areorna för cirkeln och kvadraten är alltid $\dfrac{4}{\pi}$.

Eftersom $4 > \pi$ är cirkelns area alltid större är kvadratens.

Varken r eller a förekommer i kvoten $4 / \pi$. Därför är resultatet oberoende av storleken.

c) Pga $\dfrac{4}{\pi} \approx 1,27$ är cirkelns area alltid ca. 27 % större än kvadratens, vilket överensstämmer med Pythons svar i förra övningen.

1403 Det ***duala Cirkel-kvadrat***-problemet: En cirkel och en kvadrat har *samma area*. Vilken av dem har den *minsta omkretsen*?

a) Ställ upp ett samband mellan cirkelns radie r och kvadratens sida a. Använd sambandet i ett pythonprogram liknande `Circle_Square_2`. Läs in ett exempel, beräkna figurernas omkrets och jämför dem med varandra. Kör programmet med andra exempel. Besvara frågan ovan.

b) Lös problemet matematiskt: Ställ upp ett algebraiskt uttryck för förhållandet mellan figurernas omkretsar: $O_{cirkel} \, / \, O_{kvadrat}$. Svara *exakt*, se övn **1304**.

c) Beräkna den procentuella skillnaden mellan figurernas omkrets.

Lösning:

a) Cirkelns area: $A_{cirkel} = \pi\, r^2$ Kvadratens area: $A_{kvadrat} = a^2$

Båda figurernas area ska vara lika stor, vilket innebär: $A_{kvadrat} = A_{cirkel}$

$$a^2 = \pi\, r^2$$

$$a = \sqrt{\pi\, r^2}$$

Samband mellan r och a : $\boxed{a = r\sqrt{\pi}}$

Python:

```python
# Dual_Circle_Square_1403.py                          # Filens namn

import math
r = int(input('\n\t Mata in cirkelns radie:\t'))      # Inläsning av radien
a = r * math.sqrt(math.pi)                            # Kvadratens sida
O_circle = 2 * math.pi * r                            # Cirkelns omkrets
O_square = 4 * a                                      # Kvadratens omkrets
if O_circle < O_square :
   print('\n\t Cirkelns omkrets är mindre än kvadratens.')
else :
   print('\n\t Kvadratens omkrets är mindre än cirkelns.')
FF = O_circle / O_square                              # Förändringsfaktorn
print('\n\t Cirkelns omkrets är',
      int((1 - FF)*100), '% mindre än kvadratens.\n')
```

b) Cirkelns omkrets: $O_{cirkel} = 2\,\pi\, r$

Kvadratens omkrets: $O_{kvadrat} = 4\ a = 4\ r\sqrt{\pi}$

$$O_{cirkel} \big/ O_{kvadrat} = 2\,\pi\, r \big/ 4\, r\sqrt{\pi} = \frac{2\,\pi\, r}{4\, r\sqrt{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Förhållandet mellan omkretsarna för cirkeln och kvadraten är alltid $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Eftersom $\sqrt{\pi} < 2$ är cirkelns omkrets alltid mindre är kvadratens.

Varken r eller a förekommer i kvoten $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Därför är resultatet oberoende av storleken.

c) Pga $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,89$ är cirkelns omkrets alltid ca. 11% mindre än kvadratens, se **Python**.