(Del I utan räknare)

1) Det finns 3 olika färger (lådor). Om vi tar

$$3 \cdot 4 + 1 = 13 \text{ karameller (föremål)}$$

[$n \cdot k + 1$ föremål $\Rightarrow$ minst $k+1$ i samma låda.]

måste enligt lådprincipen (sid 8, del 2) minst $4+1 =$
$= 5$ karameller ha samma färg.

Lådor: 3 färger ($n=3$)
Föremål: $3 \cdot k + 1 = x$ så att $k+1 = 5$ av samma färg.

$$3 \cdot 4 + 1 = \boxed{13} \Leftarrow k = 4$$

2) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, d, e, f\}$ $C = \{a, c, d, g\}$

a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

b) $B \setminus C = \{b, e, f\}$

c) $A \cap C = \{a, c\}$

d) $B \cap C = \{c, d\}$

e) $A \cap B \cap C = \{c\}$

f) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$|A \cup B \cup C| = 7$

3) a) $B \setminus A$ b) $C(A \cup B)$

4) En Hamiltoncykel är en väg i en graf som:

- börjar och slutar i samma nod och
- passerar varje <u>nod</u> (hörn) exakt en gång.

a) Ja, grafen har en Hamiltoncykel.

b) Nej, " " ingen Eulerkrets (se Diagnos 1 Uppg. 11).

5)

3 olika dryck
3 " smörgåsar
4 " yoghurtsmaker
2 " fruktsorter
3 " dryck

"... en dryck $\boxed{\text{och}}$ en smörgås":
$3 \cdot 3 = 9$ sätt att välja.

$\boxed{\text{eller}}$

"... en dryck, en yoghurt $\boxed{\text{och}}$ en frukt":
$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ sätt att välja.

$3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 9 + 24 = \boxed{33}$ sätt att välja.

(Mult.- och add.-principen, sid 11-12)

6) 8 nya batterier
2 gamla "
} 10 batterier

"alla möjliga"

a) Oordnat urval av 3 batterier bland 10 är en kombination (sid 14): $C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = \boxed{120}$

"bara nya"

b) $C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = \boxed{56}$

c) "minst ett gammalt" = "alla möjliga" − "bara nya" =

$$= \binom{10}{3} - \binom{8}{3} = 120 - 56 = \boxed{64}$$

7) a) $\binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \boxed{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}}$

b) $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2} = \boxed{\frac{(n+1)\cdot n}{2}}$

c) Def.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot(n-(n-2))!} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot(n-n+2)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot 2!} =$$

$$= \boxed{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}$$

7) d) Def. (7c) $\Rightarrow \binom{n+1}{n-1} = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot (n+1-(n-1))!} =$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot (n+1-n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot 2} =$$

$$= \boxed{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

8) a) 4 olika symboler (element) (sid 15)

Antalet permutationer av 4 olika element $= 4! = \boxed{24}$

b) 2 ⊕-symboler kan ordnas på 2! olika sätt.

Därför: $\dfrac{4!}{2!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \boxed{12}$

c) 2 ⊕-symboler kan ordnas på 2! olika sätt.

2 ♡- " " " " " " " .

Därför: $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \boxed{6}$

d) 3 ∗-symboler kan ordnas på 3! olika sätt.

Därför: $\dfrac{4!}{3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \boxed{4}$

9) I definitionen av alla fakulteter utom 1! ingår faktorn 2 : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$\Downarrow$

n! jämnt för alla $n \neq 1$.

10) a) $HL = 2 \cdot \binom{m}{2} + \binom{m}{1} = 2 \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m}{1} =$

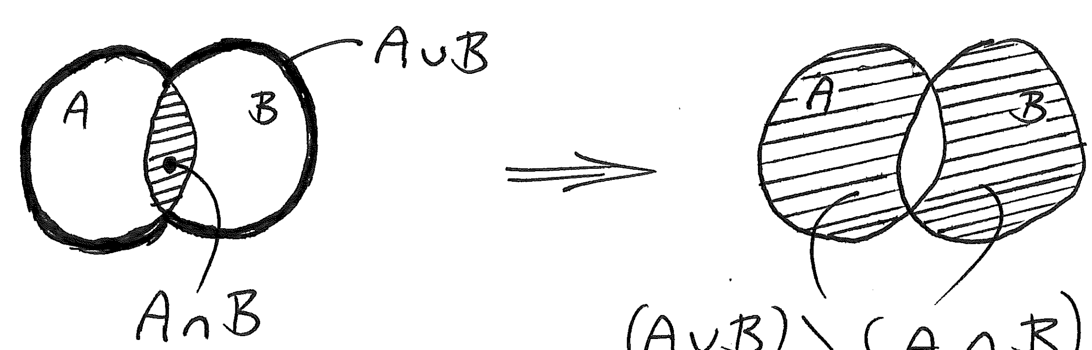
$= m \cdot (m-1) + m = m^2 - m + m = m^2 = VL$

b) $VL = \binom{2n}{n} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Pascals formel} \\ \text{(sid 31)} \end{array} \right\} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} =$

$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Symmetri} \\ \text{(sid 20)} \end{array} \right\} = \binom{2n-1}{2n-1-n} + \binom{2n-1}{n-1} =$

$= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-1} = 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1} = HL$

11) a)



$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = C =$

= Mängden av alla element ur A eller B, men inte A och B. (Bättre med Venndiagram än med ord!)

b) Om $C = \emptyset$ (se a)), så $A \cup B = A \cap B$: Detta kan bara inträffa, om $\boxed{A = B}$. (Unionen = Snittet)

12) a) Nej. (Varför?)

b) Ja, t.ex. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

(Se Anmärkning 1 i Errata: dålig uppgift!)
(Rek.: Ta bort!)

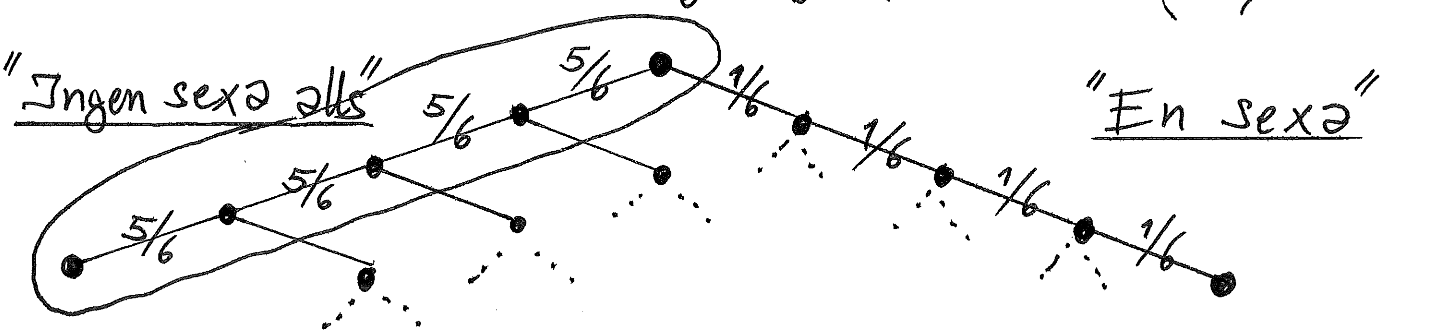
Del II Med räknare:

13) Oordnat urval av 10 utespelare bland 20 =

$$= C(20, 10) = \binom{20}{10} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10} = \boxed{184\,756}$$

14) a) Händelsen A: "åtminstone en sexa" (en eller fler) har komplementhändelsen B: "Ingen sexa alls"

med $P(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$



Därför: $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177\ldots =$
$= \boxed{52\,\%}$

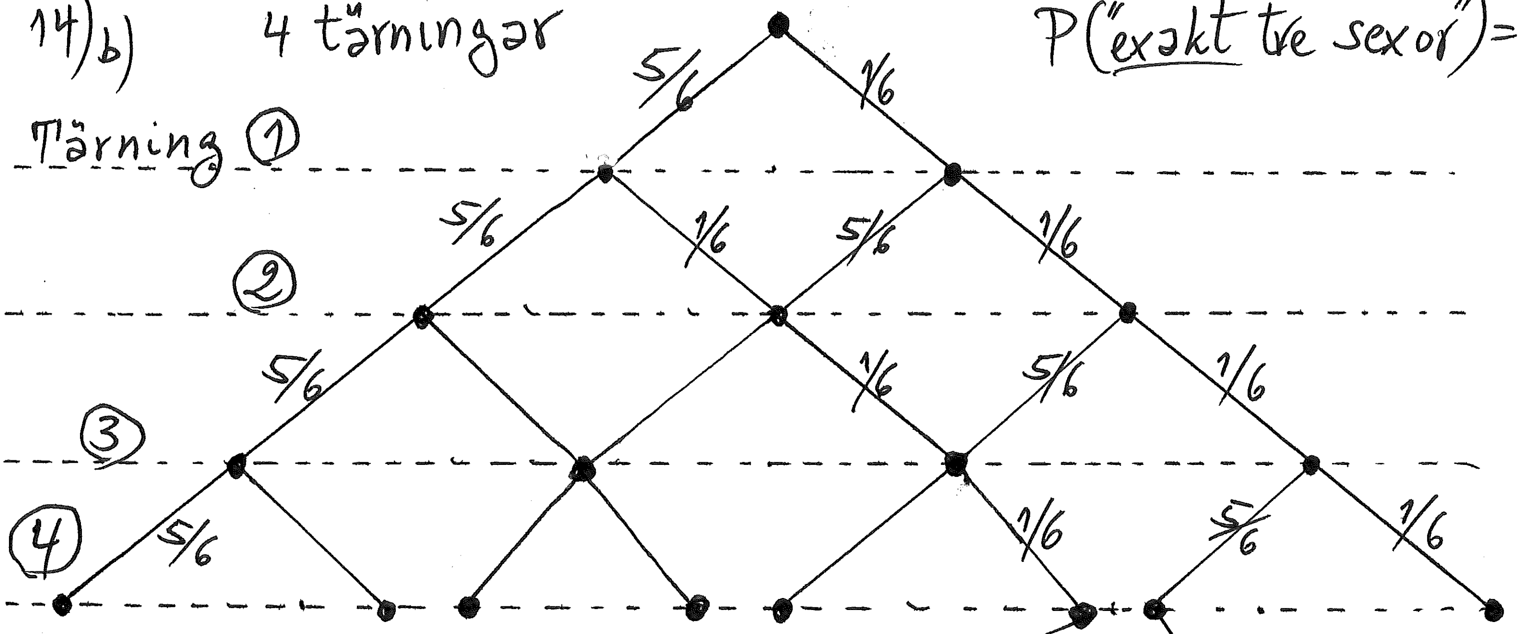
b) OBS! Fel i uppgiftens formulering:

b) "exakt tre sexor?"

Se även Errata samt fotnot.

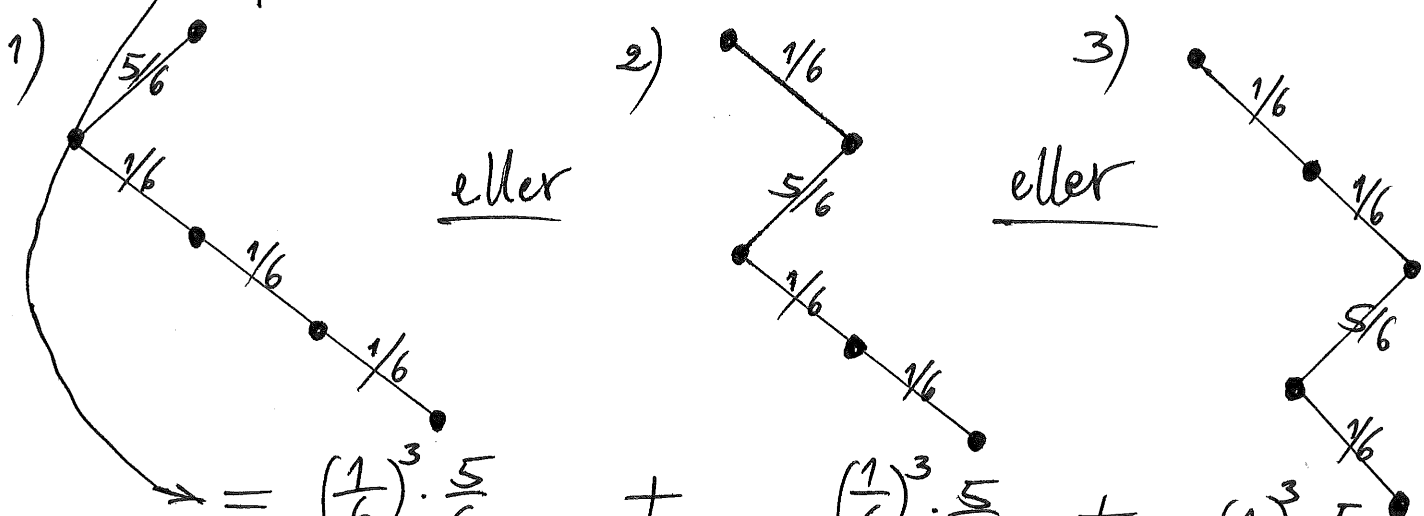
14)b) 4 tärningar

P("exakt tre sexor") = ?



$$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} \qquad \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}$$

Kan nås på 3 olika vägar:

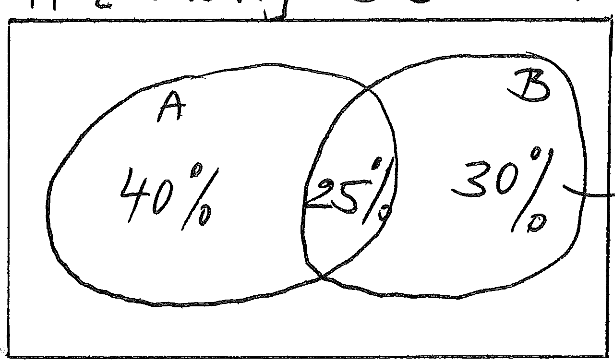


$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}$$

P("exakt tre sexor") $= 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} =$

$$= 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} = \frac{4\cdot 5}{6^4} = \boxed{0{,}015432\ldots}$$

15)a) A={...skidor...} B={...Skridskor...}



b) $40\% + 25\% + 30\% = 95\%$

$\Downarrow$

$100\% - 95\% = \boxed{5\%}$

vill varken åka skidor eller skridskor.

16) a) $VL = \binom{9}{3} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$

$$HL = \binom{9}{6} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = VL$$

b) Ett urval av 3 fotografier (oordnat, utan upprepning) bland 9 fotografier kan göras på lika många sätt, $\binom{9}{3} = C(9,3)$, som de resterande 6 (vid varje urval) bland 9, nämligen $\binom{9}{6} = C(9,6)$:

Ett exempel på symmetriegenskapen (sid 20):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

17) a) $9x^4 - 6x^2y^3 + y^6$

b) $a^3 + 3\cdot a^2\cdot 2b + 3\cdot a\cdot 4b^2 + 8b^3 =$
$= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

c) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

d) $z^{10} + 5\cdot z^8\cdot 3u + 10\cdot z^6\cdot 9u^2 + 10\cdot z^4\cdot 27u^3 + 5z^2\cdot 81u^4 + 243u^5 =$
$= z^{10} + 15z^8u + 90z^6u^2 + 270z^4u^3 + 405z^2u^4 + 243u^5$

18) Täljaren $= (x+h)^6 - x^6 = (x^6 + 6x^5h + 15x^4h^2 + 20x^3h^3 + 15x^2h^4 + 6xh^5 + h^6) - x^6 = 6x^5h + 15x^4h^2 + 20x^3h^3 + 15x^2h^4 + 6xh^5 + h^6$

$$\boxed{\frac{(x+h)^6 - x^6}{h} = 6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5}$$