DIFFERENTIALEKVATIONER

Differentialekvationer av första ordningen

949. Lös differentialekvationen $y' = 17y$.

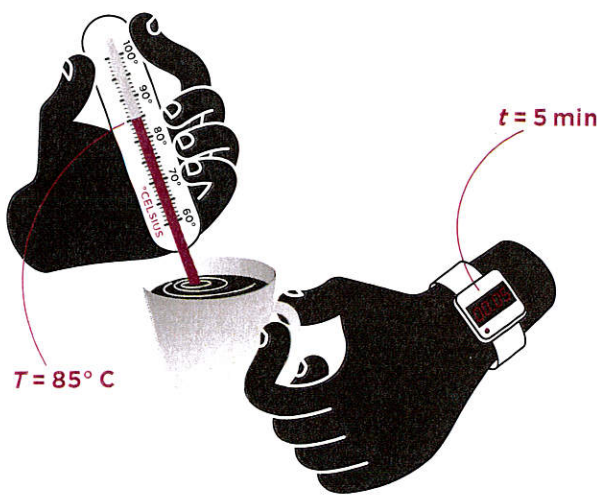
950. Bestäm den lösning till $y' = 0{,}35y$ för vilken gäller att $y(0) = 3$.

951. Lös differentialekvationen $y' = 0{,}015y$. $y(0) = 2$.

952. Till differentialekvationen $y \cdot y' + x = 0$ finns det lösningskurvor som går genom punkterna $A = (3, 4)$, $B = (1, -2)$ och $C = (3, 9)$. Bestäm tangentens k-värde i respektive punkt.

953. En lösningskurva till differentialekvationen $3y' + 2y = 0$ går genom punkten (3, 9). Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i den punkten.

954. Temperaturen y °C hos innehållet i en kaffekopp efter t minuter, kan beräknas med hjälp av lösningen till differentialekvationen $y' = -0{,}024 \cdot (y - 20)$. Efter 5 minuter uppmäter man kaffets temperatur till 85 °C. Bestäm temperaturen efter 22 minuter.



955. En lösningskurva till $y' = -3y$ går genom punkten (2, 3). Bestäm ekvationen för denna kurva.

956. Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' + y = 0$. Ange också ekvationen för den lösningskurva som går genom punkten (0, 3).

957. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - 2y = 0$ vars lösningskurva går genom punkten (2, 3).

958. Vid ett radioaktivt sönderfall fann man att sönderfallshastigheten $\frac{dm}{dt}$ var proportionell mot mängden radioaktivt material m. $\frac{dm}{dt} = 0{,}231\,m$.

Vidare fann man att $m(2) = 23$ mg, där 2 anger 2 h efter försökets början. Bestäm halveringstid och $m(0)$.

959. Halten dioxiner i fisk y, i en viss sjö i Sverige har sjunkit med ungefär 1,5% per år sedan 1980.

a) Ange en differentialekvation som beskriver hur y avtar med tiden t.

b) Beräkna när halten dioxin har sjunkit till hälften av vad den var år 1980.

960. För att minska sina uppvärmningskostnader under vintern värmer Annika och Erik ett stort varmvattenförråd under huset med solvärme under sommaren. Värmen från vattnet får värma huset underifrån som golvvärme. De räknar med att så länge vattnets temperatur är minst 30 °C räcker detta för att hålla huset vid en behaglig temperatur.

Vattnets temperaturändring $\frac{dT}{dt}$ °C/dygn

är proportionell mot dess temperatur T °C. Den 1:a oktober var vattnets temperatur 66 °C och den 1:a december var temperaturen på vattnet 48 °C. Hur länge räcker vattenförrådet till för husets uppvärmning?

961. En lösningskurva till ekvationen $3y + y' = 0$ går genom punkten (0, 5). Bestäm $y(6)$ dels exakt, dels med tre gällande siffror.

962. Då gammastrålning absorberas av olika material beskrivs den genomträngande intensiteten I av

differentialekvationen $\frac{dI}{dx} = -k \cdot I$, där x är

tjockleken hos det absorberande materialet och k är en konstant som beror av materialet och strålningens karaktär. Vid ett mättillfälle fann man att 84% av strålningen trängde igenom 3,0 cm av ett ämne. Bestäm k och ämnets tjocklek om 75% av strålningen skall stoppas.

963. Den lekmogna torsken försvinner från Nordsjön. Om biomassan lekmogen torsk är $M(t)$ (miljoner kg) och tiden t år räknas från år 1982, så kan förändringen under tidsperioden 1982 till 1999 beskrivas av differentialekvationen

$$\frac{dM}{dt} = -0{,}051 \cdot M \quad \text{och } M(0) = 200 \text{ miljoner kg.}$$

a) Beräkna biomassan hos den lekmogna torsken år 1999.

b) Anta att inga åtgärder vidtas och att nedgången fortsätter på samma sätt. Beräkna under dessa förutsättningar när mängden lekmogen torsk har minskat till 50 miljoner kg.

964. Bestäm den funktion y för vilken gäller att $x \cdot y' - x = 1$ och $y(1) = 2$.

965. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 3y = e^{4x}$ som går genom punkten (0, 6).

966. Visa att $y = C \cdot e^{\sin x} - 2 \cdot (\sin x + 1)$ är en lösning till differentialekvationen $y' - y \cdot \cos x = \sin 2x$.

967. Newtons avsvalningslag för en kropp beskrivs av

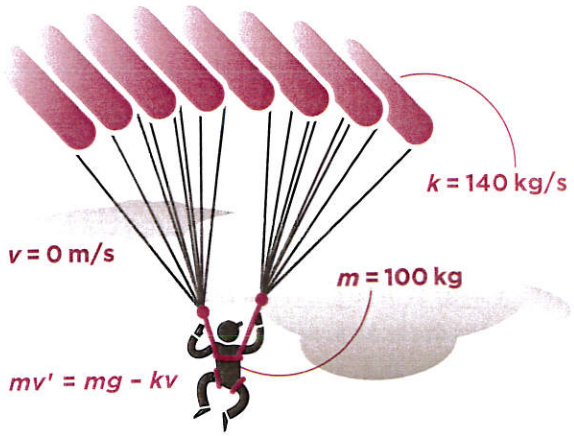
differentialekvationen $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_0)$,

där T är kroppens temperatur och T_0 omgivningens temperatur. Denna ekvation kan tillämpas både vid avsvalning och uppvärmning. En stor stek med temperaturen 20 °C sätts in i en 220 °C varm ugn. Efter 30 minuter är stekens temperatur 36 °C. Efter hur lång tid är temperaturen 69 °C?

968. Vid måttliga farter kan man anta, att luftmotståndet är proportionellt mot farten. Det gäller t.ex. vid fallskärmshopp. För farten v hos en

fallskärmshoppare gäller $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv$,

där t är tiden, m är massan av hoppare inklusive fallskärm, $g = 9{,}8$ m/s^2 och k är en konstant som beror på fallskärmens storlek och konstruktion.



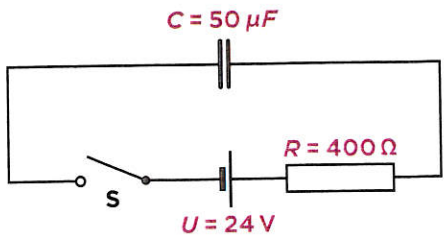
a) Bestäm $v(t)$, då $k = 140$ kg/s, $m = 100$ kg och farten vid tiden $t = 0$ är 0 m/s.

b) Beräkna gränsfarten $\lim v(t)$, då t går mot oändligheten.

969. När strömbrytaren S sluts i kretsen nedan går strömmen i genom en resistor och laddar upp en kondensator. Kondensatorn har kapacitansen $C = 50\ \mu$F och resistorn har resistansen $R = 400\ \Omega$. Spänningen U är konstant 24 V. Laddningen q på kondensatorplattorna beskrivs av

differentialekvationen $R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U$.

Strömbrytaren sluts vid tiden $t = 0$. Då är laddningen q på plattorna lika med noll. Efter hur lång tid kommer laddningen på plattorna att uppgå till 50% av sitt maximala värde?



970. En lösningskurva till differentialekvationen $y' + 3y = 9x^2 - 6x - 4$ går genom punkten (0, 25). Bestäm ekvationen för denna lösningskurva.

971. Ett visst föremål tappas från mycket hög höjd. Det faller utan begynnelsehastighet och påverkas av krafter enligt differentialekvationen

$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv$, där m är föremålets massa i kg, v hastigheten i m/s, $g = 9{,}8$ m/s^2 är tyngdaccelerationen och k en konstant.

Beräkna hur långt föremålet faller på 10 s om $m = 10$ kg och $k = 2{,}0$ kg/s.

972. Bestäm y då $y(0) = 5$ och $y' + y = \sin x + \cos x$.

▸ Differentialekvationer av andra ordningen

973. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = 0$.

974. Visa att $y = 3x^2 + 6x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + y' - y = 12 - 3x^2$.

975. Bestäm den allmänna lösningen till $3y'' - 6y' + 15y = 0$.

976. Bestäm a så att $y'' - ay' + 3y = 0$ har en lösning $y = 2 \cdot e^{3x}$.

977. Bestäm konstanten a så att $y = a \cdot \sin 2x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + y' + 4y = \cos 2x$.

978. Undersök om funktionen $y = e^x + e^{-2x} - 1$ satisfierar differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 1$.

979. Bestäm den allmänna lösningen till $3y'' - 6y' + 15y = 0$.

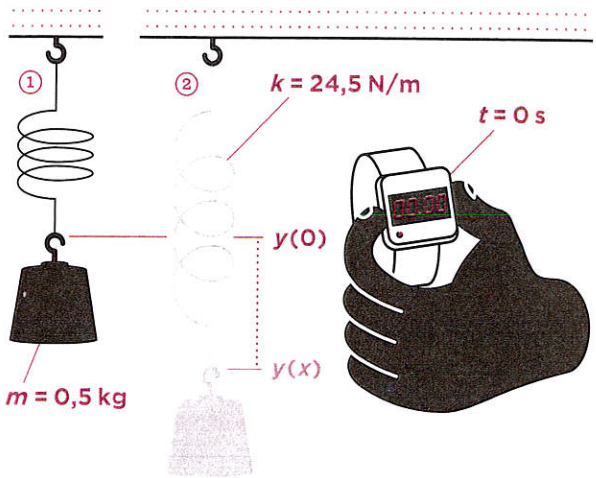
980. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' = 4$ som satisfierar villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

981. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' = 6x + \cos x$ som uppfyller kraven $y(0) = 3$ och $y'(0) = 0$.

982. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y' - 5y = 0$ som är sådan att $y(0) = 6$ och $y'(0) = 3$.

983. När en vikt med massan m kg hängs upp i en spiralfjäder med fjäderkonstanten k N/m och försätts i svängning så styrs svängningen av kraftlagen $F = m \cdot y'' = -k \cdot y$.

y (läget) är en funktion av tiden t i sekunder. Bestäm $y(t)$. $y(0) = 0$ m, $m = 0{,}50$ kg och $k = 24{,}5$ N/m. Maximala värdet av y är 0,30 m.



984. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + y = 0$ för vilken gäller att

$y(\frac{\pi}{2}) = 2$ och $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

985. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 0$, som uppfyller kraven $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

986. Lös differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 0$. Bestäm sedan den speciella lösning som innebär att $y(0) = 5$ och $y'(0) = 3$.

987. Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - 6y' - 7y = 14x^2 + 3x - 57$

988. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y + 5 = 0$ för vilken gäller att $y(0) = 10$ och $y(1) = 5$.